Е.П. Зевина, Т.А. Котова, Т.Н. Мартынова, И.А. Дуброва, И.Б. Карабовская, И.С. Журавлёв, М.В. Денисова, С.Г. Зимина, Л.Е. Верёвкина, Э.Б. Ермолаева. Математика в военном деле: учебное пособие для кадет. – Оренбург: Оренбургское ПКУ, 2022.

Программа спецкурса для 5-11 классов «Математика в военном деле» является интегрированной, а также предметно-ориентированной, что подтверждает практическую значимость использования математических знаний.

В программе используются темы курса математики, физики, географии, практическое применение которых позволяет кадетам решать задачи военно-прикладной направленности. Программа ориентирована на формирование и развитие умений математического моделирования при решении военных практико-ориентированных задач.

Утверждено на заседании преподавателей отдельной дисциплины
(математика, информатика и ИКТ). Протокол №1 от 25.08.2022

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА

Класс, количество часов	Краткая характеристика курса, его назначение с точки зрения формирования качеств будущего офицера	Форма контроля
5 класс 6 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Математика в решении военно-прикладных задач».** **Тема 1. Решение военно-прикладных задач на движение.** Совместное движение, движение по течению, движение против течения, уравнение в задачах на движение. (1ч) **Тема 2. Задачи с элементами комбинаторики.** Комбинаторика, комбинаторная задача, метод перебора, дерево вариантов («дерево возможностей»), правила сложения и умножения. (1ч) **Тема 3. Решение военно-прикладных задач на нахождение площади.** Площадь, единицы измерения площади, площадь участка местности по карте, площадь для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества людей, техники, стройматериала и др.). (1ч) **Тема 4. Решение военно-прикладных задач на нахождение объёма.** Объем, единицы измерения объемов, объём конкретных предметов, нахождение объёма для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества цистерн, канистр и др.) (1ч) **Тема 5. Решение задач с помощью составления уравнения.** Уравнение, корень уравнения. Уравнение-математическая модель. Задачи на составление уравнения. (1ч) **Итоговое занятие**. Зачет по спецкурсу «Математика в решении военно-прикладных задач». (1ч)	Зачет
6 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Отчизне служат координаты».** **Тема 1. Чтение плана местности, условных знаков.** Системы координат, условные знаки, чтение плана местности. Определение координат объекта на карте местности, изображение объекта условными знаками на карте по координатам. Определение по плану объектов местности, сторон горизонта по компасу, плану, Солнцу; направления, расстояния. (1ч) **Тема 2. Масштаб.** Масштаб. Условные знаки и масштабы карт. Нахождение расстояний между военными объектами и их изображение на карте. (1 ч) **Тема 3. Военная топология.** Военная топология. Изучение тактических свойств местности. Размещение РЛС. (1 ч) **Тема 4. Морские карты.**	Военно-тактическая игра в координатах

	Морские карты. Как проложить фарватер для военных судов. (1ч) **Итоговое занятие.** Военно-тактическая игра в координатах по спецкурсу «Отчизне служат координаты». (1ч)	
7 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Использование математических моделей в решении военно-прикладных задач»**. **Тема 1. Решение военно-прикладных задач с помощью графиков линейных функций.** Линейная функция. Построение и чтение графиков. Расчет времени и скорости движения единиц военной техники. (1ч) **Тема 2. Решение военно-прикладных задач с помощью математических моделей.** Математическое моделирование как способ решения военно-стратегических задач. Составление модели, выполнение оценки и решение задачи. Описание явлений и событий с использованием графика. (1ч) **Тема 3. Решение военно-прикладных задач с помощью геометрических моделей.** Военная топография как наука. Прямоугольная система координат на плоскости. Географические координаты. Определение прямоугольных и географических координат. Определение движения по азимутам. (1ч) **Тема 4. Решение военно-прикладных задач различными способами.** Различные способы решения военно-стратегических задач. Переход от одних единиц измерения к другим. Графическое описание явлений и событий. Составление математических моделей к задачам и их решение. (1ч) **Итоговое занятие.** Практическая работа по спецкурсу «Использование математических моделей в решении военно-прикладных задач». (1ч)	Практическая работа
8 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Математика в решении военно-прикладных задач».** **Тема 1. Функция вида** $y = kx^2$ Системы координат, график и свойства квадратичной функции. Выполнение построения графика и расчета угла отклонения выстрела (1ч) **Тема 2. Применение подобия треугольников при решении военно-прикладных задач** Подобие фигур, признаки подобия треугольников. Использование признаков подобия и пропорциональности линейных размеров фигур для определения заданных расстояний на местности. (1ч) **Тема 3. Элементы математической статистики.** Некоторые термины математической статистики: генеральная совокупность объектов исследования, выборочной совокупностью (выборка), среднее арифметическое, медиана, мода, стандартное	Конкурс-защита составленных задач

	отклонение и его формула., варианта измерений, частота варианты измерений. (1ч) **Тема 4. Математическое моделирование.** Математическое моделирование. Математические модели реальных ситуаций: уравнения, неравенства, системы уравнений, функции. Использование математических моделей для решение военно-прикладных задач. (1ч) **Итоговое занятие.** Конкурс по спецкурсу «Моя математическая задача в военном деле». (1ч)	
9 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Геометрические расчеты в военном деле».** **Тема 1. Подобие треугольников в решении военно-прикладных задач.** Определение подобных фигур, признаки подобия треугольников, свойства подобных фигур. Особенности и методы измерения расстояний на местности. (1ч) **Тема2. Метод координат в военном деле.** Применение метода координат к решению прикладных задач. Суть метода: геометрическая фигура помещается в прямоугольную систему координат, после чего все точки фигуры обретает свои координаты, связанные уравнением, неравенством, системой уравнений или неравенств. Решение геометрической задачи сводится к решению этих алгебраических конструкций. (1ч) **Тема 3. Расчеты площади в военном деле.** Применение формул нахождения площадей плоских фигур, изученные в курсе геометрии в разных профессиональных областях и сферах жизнедеятельности, в том числе и при решении боевых задач. (1ч) **Тема 4. Решение треугольников в военно-прикладных задачах.** Нахождение неизвестных сторон и углов треугольника, используя теоремы синусов, косинусов, следствий из этих теорем, свойства треугольника. (1ч) **Итоговое занятие.** Проверочная работа по спецкурсу «Геометрические расчеты в военном деле». (1ч)	Проверочная работа «Геометрические расчеты в военном деле»
10 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Решение оперативно-тактических задач математическими методами».** **Тема 1. Расчет величин баллистического движения.** Решение задач на расчет величин, характеризующих баллистическое движение, тригонометрических функции, тригонометрические уравнения и неравенства (1ч) **Тема 2. Математические расчеты артиллериста.** Уравнение траектории. Дальность полета снаряда и начальная скорость. (1 ч) **Тема 3. Теория вероятностей в прогнозировании хода боя.**	Практическая работа

	Применение теории вероятностей в оценке боевой обстановки, прогнозировании хода боевых действий. (1 ч) **Тема 4. Классическое определение вероятностей и теоремы теории вероятностей.** События, виды событий. Определение вероятностей, теоремы вероятностей. (1ч) **Итоговое занятие.** Зачет по спецкурсу «Решение оперативно-тактических задач математическими методами». (1ч)	
11 класс 5 часов (за счёт часов, отведённых на итоговое повторение)	**«Артиллерия и математика».** **Тема 1. Функции и графики.** Графики функций в методике градуировки измерительных каналов бортовых устройств. Использование свойств квадратичной функции и графика квадратичной функции - параболы в автономных системах управления баллистических ракет. (1ч) **Тема 2. Тригонометрия.** Применение тригонометрических формул в баллистике управляемых ракет дальнего действия. Применение тригонометрических функций в автоматике управляемых снарядов нового поколения. (1ч) **Тема 3. Производная. Применение производной.** Использование геометрического смысла производной – уравнения касательной в теории полета ракет. Применение механического смысла производной в управлении зенитными ракетами. (1ч) **Тема 4. Векторный и координатный методы решения геометрических задач. Формулы объемов геометрических тел.** Метод координат в пространстве в военной топографии для связистов. Метод векторов в топографической службе. Использование формул для вычисления объемов тел в устройствах и проектировании стволов артиллерийских орудий. (1ч) **Итоговое занятие.** Защита решения задач по спецкурсу «Артиллерия и математика». (1ч)	Защита решения задач

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММЫ СПЕЦКУРСА

РАЗДЕЛ 1.
5 класс
«Математика в решении военно-прикладных задач»

Введение

Программа спецкурса для 5 классов показывает возможность применения математических знаний при решении военно-прикладных задач; решения задач из реальной жизни, применения математических знаний для решения задач из других областей знаний; решения задачи разными способами, сравнивать способы решения задачи, выбирать рациональные способы. Темы для спецкурса выбраны не случайно. Грамотные расчеты, быстрота и точность управления оружием, качество принимаемых решений – важнейшие условия успеха в современных военных действиях. В основе успеха лежит точный расчет и логико-математические методы оценки обстановки.

Прикладная направленность курса и его межпредметные связи обеспечиваются систематическим обращением к примерам, раскрывающим возможности применения математики: при решении задач на движение; задач на обеспечение вооружением, боеприпасами, топливом, продовольствием; на расчёт площади участка местности по карте, на нахождение площадей для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества людей, техники, стройматериала и др.); практических задач на нахождение объёма конкретных предметов, на нахождение объёма для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества цистерн, канистр и др.); комбинаторных задач.

Кадету, как будущему офицеру, так и солдату, необходимо развивать умения распознавать, анализировать, оценивать, интерпретировать, модифицировать математические модели в задачах военно-прикладного характера, что в свою очередь будет способствовать формированию умений быстро оценивать ситуацию и принимать верное решение при выполнении военно-стратегических задач.

Цели курса: углубление и расширение знаний учащихся по изучаемым темам; на примерах решения военно-прикладных задач показать значимость математики в военном деле; ориентировать кадет к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики 5 класса; помочь овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности; развивать умение переводить различные задачи на язык математики; научить использовать знания для описания и решения задач с военной составляющей.

Тематическое планирование

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	Кол-во часов	Характеристика видов деятельности кадет
1. Решение военно-прикладных задач на движение.	1ч.	Решение задач на совместное движение, на движение по воде, составление математической модели в задачах на движение.
2. Задачи с элементами комбинаторики	1ч.	Решение комбинаторных задач методом перебора, составлением дерева вариантов («дерево возможностей»), правила сложения и умножения.
3. Решение военно-прикладных задач на нахождение площади.	1ч.	Решение задач на обеспечение вооружением, боеприпасами, топливом, продовольствием, на расчёт площади участка местности по карте, на нахождение площадей для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества людей, техники, стройматериала и др.).
4. Решение военно-прикладных задач на нахождение объёма.	1ч.	Решение практических задач на нахождение объёма конкретных предметов, на нахождение объёма для дальнейшего расчёта других неизвестных единиц (количества цистерн, канистр и др.).
5. Решение задач с помощью составления уравнения	1ч.	Решение уравнений, решение задач на составление уравнений.
6. Итоговый зачет по спецкурсу «Математика в решении военно-прикладных задач»	1ч.	Решение задач по темам спецкурса.

Занятие 1.
Решение военно-прикладных задач на движение.

Военно-морской флот (ВМФ)–один из трех видов вооруженных сил России, предназначенный для ведения боевых действий на море в целях обеспечения обороны и безопасности Российской Федерации. Вооружение

ВМФ, которое использует армия новой России, достаточно разнообразно. Надводные корабли обеспечивают поддержку подводных сил, перевозку десантных войск и прикрытие высадки, охрану территориальных вод, береговой линии, поиск и слежение за противником, поддержку диверсионных операций.

ВМФ включает в себя эскадронные миноносцы, сторожевые корабли, малые ракетные и противолодочные корабли, ракетные, противодиверсионные катера, большие и малые десантные корабли, тральщики, десантные катера.

Повторение материала:

- Что такое собственная скорость катера?

Ответ: *скорость катера в стоячей воде (озере, пруду)*.

- Что такое скорость течения?

Ответ: *на какое расстояние относит река предмет на единицу времени*.

- Как определяется скорость катера по течению реки?

Ответ: *как сумма скоростей собственной и течения*.

- Как определяется скорость катера против течения реки?

Ответ: *как разность скоростей собственной и течения*.

- Как определяется скорость плота по реке?

Ответ: *как скорость течения реки*.

Подведем итоги:

V по течению = Vсобственная + Vтечения

V против течения = V собственная – V течения

Vтеч. реки = (Vпо теч. реки – V против теч. реки): 2

V собственная = V по теч. реки – V против теч. реки.

Рассмотрим задачи, в которых речь идет о движении объекта по реке. Скорость любого объекта в стоячей воде называют собственной скоростью этого объекта.

Чтобы узнать скорость объекта, который движется против течения реки, надо из собственной скорости объекта вычесть скорость течения реки.

Пример 1. Торпедный катер движется против течения реки. За сколько часов он преодолеет расстояние 270 км, если его собственная скорость 92 км/ч, а скорость течения реки 2км/ч.

Решение.

1) 92 – 2 = 90 (км/ч) - скорость катера против

течения реки.

2) 270:90 = 3(ч) - катер преодолеет расстояние.

Ответ: за 3 часа.

Пример 2. Выполняя задания военный катер должен прибыть в пункт В из пункта А и пробыв в пункте В 1 час вернуться обратно. Сколько времени понадобится на выполнение задачи, если скорость против течения реки катера 28 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч и расстояние между пунктами А и В равно 476 км.

Решение.

1) 28+3=31 (км/ч) - собственная скорость катера.

2) 31+3=34 (км/ч) - скорость катера по течению.

3) 476:28=17 (ч) - время в пути против течения.

4) 476:34 =14 (ч) - время в пути по течению.

5) 17+14+1=32 (ч) - понадобится на выполнение задания.

Ответ: 32 часа.

Решение задачи можно записать короче, используя математическое выражение:

$$476:28+476:(28+3+3) + 1=32 \text{ (ч)}$$

Пример 3. Теплоход с военно-стратегическим грузом на борту проходит по течению реки до пункта назначения за 10 часов и после стоянки возвращается в пункт отправления за 16 часов. Найдите скорость собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 3 км/ч.

Решение.

Составим уравнение для решения этой задачи. Пусть x км/ч - собственная скорость теплохода, тогда (x + 3) км/ч - скорость теплохода по течению, а (x – 3) км/ч - скорость теплохода против течения.

10(x + 3) км – путь, пройденный теплоходом по течению реки, 16(x – 3) км – против течения реки. Так как расстояния одинаковые то составим уравнение: 10(x - 3) = 16(x + 3).

Решать такое уравнение мы будем учиться в шестом классе, а находить скорость теплохода по течению и против течения надо научиться в 5 классе.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1 Расстояние между двумя причалами 24 км. Сколько времени потратит катер на путь от одного причала до другого и обратно, если собственная скорость моторной лодки 10 км/ч, а скорость течения 2 км/ч?

Задача 1.2 Скорость катера по течению 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. Сколько времени потратит моторная лодка на путь от одной пристани до другой и обратно, если расстояние между пристанями 36 км?

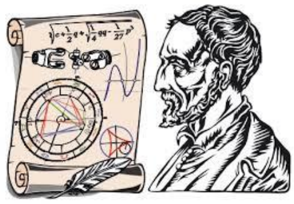
Занятие 2.

Задачи с элементами комбинаторики.

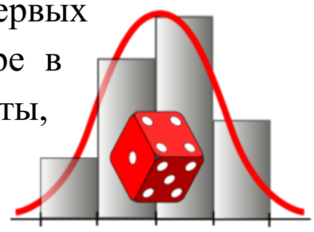
Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитать число всевозможных способов расположения некоторых предметов или выбирать комбинации всевозможных способов осуществления некоторых действий. На помощь приходит комбинаторика, которая занимается поиском ответа на вопрос: сколько всего комбинаций существует в том или ином случае и какие из них наиболее выгодные.

С подобными задачами люди столкнулись очень давно, выбирая наилучшее расположение для охотников во время охоты или воинов – во время битвы.

Умея рассуждать, перебирать различные варианты решений, т.е., владея навыками решения комбинаторных задач, человеку легче найти выход из самой безвыходной ситуации.



Комбинаторика – это раздел математики, изучающий комбинации и перестановки предметов. Она возникла в XVI в, когда в жизни общества большое место занимали азартные игры.



Большой вклад в развитие комбинаторики внесли итальянский математик Никколо Тарталья и Галилео Галилей. Тарталья одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости. Со временем появились различные игры (шашки, карты, шахматы, нарды и др.), в которых приходилось рассматривать различные сочетания фигур. Выигрывал, как правило, тот, кто знал выигрышные комбинации и умело избегал проигрышные.

Но не только игры наводили на размышление о комбинаторике математиков того времени. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, а секретные службы других государств пытались их разгадать. Эти шифры были основаны на комбинаторных принципах. Например, на различных перестановках букв с использованием ключевых слов.

Комбинаторика, как наука, стала развиваться в XVIII веке параллельно с возникновением теории вероятностей. Так как для решения вероятностной задачи необходимо подсчитать число различных комбинаций.

В настоящее время из-за стремительного развития кибернетики и вычислительной техники возрос и интерес к комбинаторике. В образовательный стандарт по математике включены основы комбинаторики и решение комбинаторных задач методом перебора, составлением дерева вариантов («дерево возможностей»), с применением правила умножения.

Рассмотрим задачи.

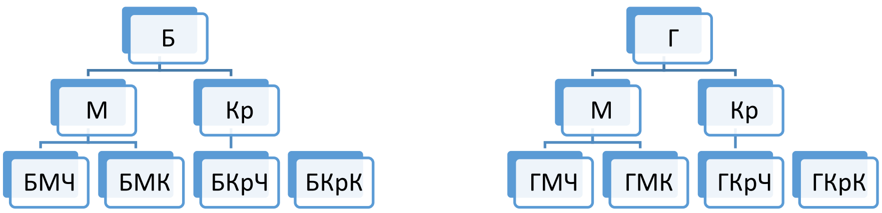
Пример 1. Кадетам в столовой можно заказать на первое борщ или грибной суп, на второе – мясо с макаронами или курицу с рисом. А на третье – чай или компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?

1 способ. *Перечислим всевозможные варианты*

Чай (Ч) Компот (К)	Мясо с макаронами (М)		Курицу с рисом (Кр)	
Борщ (Б)	БМЧ	БМК	БКрЧ	БКрК
Грибной (Г)	ГМЧ	ГМК	ГКрЧ	ГКрК

Ответ: 8 вариантов.

2 способ. *Дерево возможных вариантов*



3 способ

Используя правило умножения, получаем: **2*2*2 = 8**.

В данной задаче нам пришлось перебрать все возможные варианты (комбинации). Поэтому такие задачи называют *комбинаторными*.

Пример 2. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде трех горизонтальных полос одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий и красный. Сколько стран могут использовать такую символику? (У каждой страны свой, отличный от других, флаг).

Решение.

Ответ: 6 вариантов.

Пример 3. Сколько различных шифров можно составить, переставляя буквы в слове «кадет»?

Решение. Задачу можно решить с помощью формулы для подсчета перестановок: $P_n = n!$, где $n!$ – эн факториал – это произведение n первых натуральных чисел.

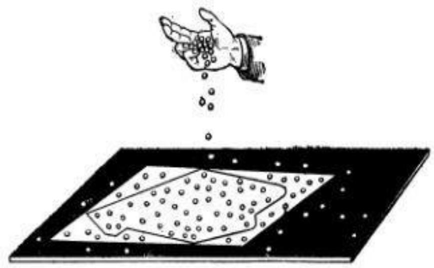
$P_5 = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$.

Ответ: 120 различных шифров.

Это интересно и знать полезно

Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач с помощью моделирования случайных величин. Он позволяет довольно быстро моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные величины, подчиненные закону равномерной плотности.

В чем же суть этого метода? Допустим, что мы решили определить площадь S некоторой сложной фигуры Ф. Сделать это не так уж просто, если даже мы разобьем эту площадь на большое количество маленьких фигур.



По методу Монте-Карло предлагается следующее: высыпать горошинки на интересуемую фигуру и подсчитать, сколько их войдет в прямоугольник (прямоугольник должен вплотную примыкать к фигуре) и в фигуру раздельно. Допустим, что на весь прямоугольник попало 60 горошин, а в интересуемую фигуру – 15. Тогда площадь интересуемой фигуры определится из следующего простейшего соотношения: $S = 15: 60 = 0{,}25$.

Следовательно, площадь фигуры Ф составляет 0,25 от площади всего прямоугольника. Ну, а вычислить площадь прямоугольника с известными длинами сторон не представит трудности.

Иногда метод Монте-Карло может явиться единственным решением сложной математической задачи. Точность данного метода достаточно высока и вполне приемлема для авиационной практики, особенно для расчетов в уме.

Заметим, что горошинами могут быть и ракеты, и случайные замеры навигационных элементов полета, и вероятные местонахождения летательного аппарата, а сама фигура Ф может быть и площадкой десантирования, и целью.

Задачи для самостоятельного решения

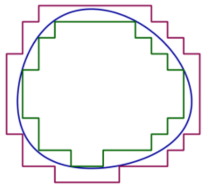
Задача 2.1 Пять военнослужащих решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий им понадобится?

Задача 2.2 За круглый стол переговоров село 5 дипломатов. Сколько различных вариантов рассадки при этом может оказаться?

Занятие 3.

Решение военно-прикладных задач на нахождение площади.

Многие годы площадь считалась первичным понятием, не требующим определения. Позднее определение площади было сформулировано для многоугольников, а затем оно было расширено на квадрируемые фигуры.



Квадрируемой называется такая фигура, которую можно вписать в многоугольник и в которую можно вписать многоугольник. Заметим, что площади обоих многоугольников отличаются на совсем малую величину.

Площадь можно рассматривать как положительную величину, по отношению к которой могут быть установлены критерии сравнения (признаки равенства и неравенства). Эта величина не зависит от положения фигуры в пространстве.

Начиная с 5-го класса, кадеты знакомятся с понятием площадей разных фигур. Площадь показывает размер части плоскости, которую занимает данная фигура.

Задачи на нахождение площади той или иной фигуры связаны с самой простой на первый взгляд фигурой – квадратом. Главная заслуга квадрата – это практическое использование его, как единицы площади при вычислениях. Действительно, квадратами очень удобно замащивать плоские участки. Кругами такого не сделаешь без дыр и наложений. Очень часто математики вместо слов «нахождение площади» говорят «квадрирование».

При вычислении площади отталкиваются от единичного квадрата. То есть от квадрата со стороной 1 мм, 1 см, 1 м и т.д.

Измерить площадь фигуры – это значит подсчитать, сколько единичных квадратов в ней помещается. Площадь, как правило, обозначается буквой S.

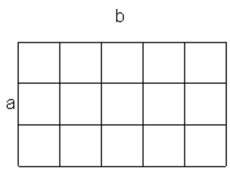
Перечислим свойства площадей:

- ✓ равные фигуры имеют равные площади;
- ✓ площадь фигуры равна сумме площадей фигур, из которых она состоит.

Фигуры, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Особая роль отводится площади прямоугольника.

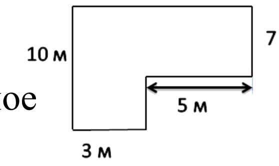
Для того, чтобы найти площадь прямоугольника без формулы, необходимо сосчитать количество единичных квадратов, на которые он разбит.



Данный прямоугольник разбит на 15 квадратов, то есть его площадь равна 15 см^2. Так как в ширину фигура занимает 3 квадрата, а в длину – 5, то, чтобы найти количество квадратов, необходимо умножить длину на ширину.

$$S = ab$$

Особое внимание нужно обращать на единицы измерения длины и ширины. Они должны совпадать. Если единицы измерений не совпадают, то их переводят в одинаковые.



Пример 1.

Найти пощадь участка воинской части, занимаемое продовольственным складом (рисунок).

Решение.

Для того чтобы вычислить площадь данного участка, разобьем фигуру на два прямоугольника. Один из них будет иметь размеры 10 м и 3м, а другой - 5 м и 7 м. Отдельно находим их площади, а результаты складываем: $\mathbf{S_ф = S_1 + S_2}$.

1) $S_1 = 10*3 = 30$ (м^2),

2) $S_2 = 5*7 = 35$ (м^2)

3) $S_ф = 30+35=65$(м^2)

Ответ: S = 65 м^2

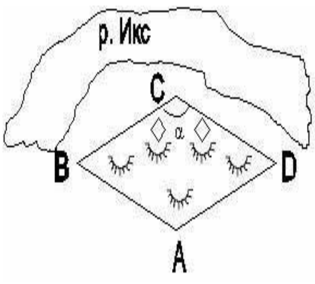
Полезно вспомнить единицы измерения площади:

1 км^2 = 1 000 000 м^2, 1 км^2 = 100 га

1 га = 10 000 м^2, 1 га = 100, а

1 а = 100 м^2 (сотка)

1 м^2 = 100 дм^2, 1 м^2 = 10 000 см^2



Задача 2. Обороняемый участок местности по форме является практически прямоугольником со сторонами 2 км 300 м и 3 км 400 м. Определите площадь обороняемого участка в гектарах.

Решение. Переведем единицы измерения в метры:

2 км 300 м = 2 300 м, 3 км 400 м = 3 400 м

S = 2 300 * 3 400 = 7 820 000 (м^2)

820 000 м^2 = 782 га

Ответ: 782 га.

Пример 3. Площадь Донгузского полигона 121 000 га. Определите его длину, если ширина приближенно равна 30 км.

Переведем гектары в квадратные километры:

121 000 га = 1 210 км^2.

1 210: 30 = 40 (ост. 10)

Ответ: около 40 км.

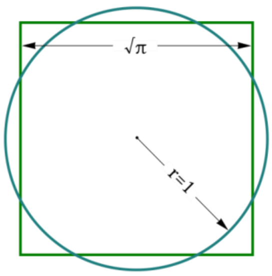
Донгузский полигон расположен в Оренбургской области к юго-западу от железнодорожной станции Донгузская. Предназначен он для испытания зенитно-ракетных вооружений войск ПВО и проведения войсковых учений с применением данного оружия. Основан он в 1934 году. Вплоть до разработки и начала испытания первых ЗРК войск ПВО страны являлся единственным зенитным полигоном СССР, на котором испытывалось все вновь создаваемое зенитное артиллерийское вооружение и радиолокационная техника. В Донгузе испытывалась знаменитая «Катюша», а также другие системы залпового огня и средства ПВО – «Град», «Прима», «Смерч» и «Ураган» и др. В МИК полигона производилась сборка ядерных боезарядов. А в 1988 году начались баллистические испытания 152-мм танковой пушки.

Это интересно и знать полезно

Возьму линейку, проведу прямую,
И мигом круг квадратом обернется,
Посередине рынок мы устроим,
А от него уж улицы пойдут –
Ну как на Солнце!
/Аристофан/

Задача о квадратуре круга

Задача была известна уже за две тысячи лет до н. э. в Древнем Египте и Вавилоне. В то время у египетских математиков находятся первые решения задачи о построении квадрата, равновеликому данному кругу.



Древнегреческие математики достигли чрезвычайно большого искусства в геометрических построениях. Так появилась мысль обобщить эту задачу: построить с помощью циркуля и линейки такой квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга.

Задача получила название квадратуры круга. Многие ученые пытались выполнить такое построение. Задача являлась самой заманчивой и соблазнительной. Армия «квадратурщиков» неустанно пополнялась каждым новым поколением математиков. Однако решение не поддавалось их усилиям. Лишь в 80-х годах 19в. было строго доказано, что решить задачу о квадратуре круга с помощью только циркуля и линейки невозможно. Эта задача становится разрешимой, если применять, кроме циркуля и линейки, еще другие средства построения. С тех пор термин «квадратуры круга» стал синонимом неразрешимых задач.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1 Группировке войск противника к югу от курского выступа нанесено решительное поражение. Стратегическая операция продолжалась 21сутки. Пространственные параметры операции: глубина - 140 км, полоса наступления по фронту - 300 км. Какова площадь боевого сражения?

Задача 3.2 Боевые действия в тылу врага развернулись на местности протяженностью около 1 000 км по фронту и 750 км в глубину. Какова площадь военных действий?

Задача 3.3 Лагерь для учений разбит на прямоугольные кварталы продольными и тремя поперечными линейками, которые служат одновременно и дорогами.

Определите, сколько палаток, с размерами: 5 м 20 см на 3 м 60 см можно установить в лагере, если известно, что расстояние между палатками 2 м 50 см, ширина линейки – 3 м. Участок, занимаемый лагерем, имеет размеры: 24 м 60 см на 61 м.

Занятие 4.

Решение военно-прикладных задач на нахождение объема.

Задача определения объемов тел относится к глубокой древности. Она возникла в связи с практической деятельностью людей. В древнем Египте гробницы фараонов имели форму пирамид. Внутри пирамиды находились погребальные склепы и коридоры. Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. В древнегреческих папирусах, вавилонских клинописных табличках так же встречаются способы нахождения объемов тел. Архимед определил объемы почти всех тел, которые встречаются в античной математике.

Говоря простым языком, объем — это часть пространства, занимаемая телом. Объем – некоторая геометрическая величина, которая говорит о том, что тело трехмерное, то есть занимает часть пространства. Понятие объема обладает следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объемы;

2. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Для решения задач, связанных с нахождением объемов, необходимы знания теоретического материала.

Так объем — это величина, которую можно измерить, значит, нужны единицы измерения. За единицу измерения объемов выбрали куб ребро, которого равно единичному отрезку. Поэтому $1мм^3$ это объем куба со стороной 1мм, $1см^3$ – объем куба со стороной 1 см. Соотношения между единицами измерения объемов:

$1см^3$ = 1см · 1см· 1см = 10мм· 10 мм· 10мм = $1000мм^3$

$1дм^3$ = $1000000мм^3$

$1дм^3$ = 1л.

Формулы для вычисления объемов прямоугольного параллелепипеда и куба.

Для прямоугольного параллелепипеда:

V = *abc*, где ***a*** - длина, **b** – ширина, **c**- высота;

$\mathbf{V = S_{осн.} h}$, где $\mathbf{S_{осн.}}$ – площадь основания, **h** – высота.

Для куба:

$\mathbf{V} = \boldsymbol{a^3}$, где ***a*** - ребро куба.

Рассмотрим задачи.

Пример 1.

Ширина бака прямоугольной формы 1м, она в 2 раза меньше длины и на 5дм больше высоты. Найдите вместимость бака и выразите в литрах.

Решение: 1м = 10дм.

1) $10 \cdot 2 = 20$(дм) – длина бака.
2) 20 – 5 = 15 (дм) – высота бака.
3) 10· 20 · 15 =3000$(дм)^3$ = 3000л – вместимость бака.

Ответ: 3000литров.

Важным моментом в работе воинских частей является организация грузоперевозок. Воинским грузом являются вооружение, военная техника, боеприпасы, горюче-смазочные материалы, топливо, вещевое имущество и иное военное имущество, являющееся федеральной собственностью и закрепленное за воинскими частями, принятое органами железнодорожного, морского, речного, воздушного транспорта к перевозке.

Пример 2.

Для перевозки груза военно-стратегического назначения необходимо заправить 160 КАМАЗОВ с объемом топливного бака 950 литров. Сколько цистерн объемом 76 $м^3$ топлива необходимо заказать?

Решение.

$1дм^3 = 1л.$ $1м^3 = 1000дм^3$,

$76\ м^3 = 76000дм^3 = 76000л.$

1) 160·950 = 152000(л) - объем топлива.

2) 152000: 76000= 2(шт.) – количество цистерн

Ответ: 2 цистерны.

Пример 3.

Сколько емкостей прямоугольной формы (длиной 6м, высотой 3м и шириной 3м) необходимо для хранения запасов топлива, предназначенного для военных катеров, в количестве 405000 литров? При этом следует учесть, что уровень топлива в баке должен быть ниже верхнего края на 50 см.

Решение.

Найдем объем емкости с размерами 60дм, 25дм, и 30дм.

1) 60 · 25 · 30 = 45000($дм^3$) - объём емкости, 45000($дм^3$) $= 45000л$

2) 405000: 45 000 = 9(шт.) - количество необходимых емкостей.

Ответ: 9 емкостей.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1 Оборонительная траншея имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 1м 40 см, шириной 90 см и глубиной 1м 50 см.
Определите объем грунта, который нужно вынуть из земли, если общая длина всей траншеи на участке обороны должна быть около 155 м. Ответ округлите до единиц.

Задача 4.2 Какова должна быть площадь платформы для перевозки 4 контейнеров военно-стратегического груза, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, если объем каждого контейнера равен 15 $м^3$, а высота 3 м?

Занятие 5.

Решение задач с помощью составления уравнения.

В знаменитом диалоге Платона «Государство» говорится о том, что арифметика и геометрия необходимы каждому воину: при устройстве лагерей, занятия местностей, стягивания и развертывания войск и разных других воинских построениях, как во время сражения, так и в походах, конечно, скажется разница между знатоками геометрии и тем, кто ее не знает».

В этом параграфе мы будем решать задачи с помощью составления уравнения. Иными словами, мы будем заниматься математическим моделированием. Математическая модель – это способ описания реальной жизненной ситуации (задачи) с помощью математического языка и математической модели. Математической моделью реальной ситуации может быть уравнение. Вспомним основные понятия, которые нам пригодятся:

- ✓ *Уравнением* называют равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти.
- ✓ Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называют *корнем* уравнения.
- ✓ *Решить уравнение* – это значит найти все его корни или убедиться, что их нет.

Пример 1.

С 30 сентября по 5 декабря 1941 года Красная Армия вела тяжелые, кровопролитные бои под Москвой. Сложная обстановка потребовала эвакуации из Москвы ряда важнейших предприятий. Создавались новые рубежи обороны на ближних подступах к Москве. Формировались дивизии народного ополчения, город готовился к уличным боям. На строительство оборонительных сооружений было мобилизовано 450 000 жителей столицы, из них женщин было в 3 раза больше, чем мужчин. Сколько женщин участвовало в этом строительстве?

Решение

Пусть x мужчин участвовало в строительстве оборонительных сооружений, тогда женщин было 3x человек. Используя условие задачи, что всего было мобилизовано 450 000 жителей столицы, составим уравнение:

$x + 3x = 450\,000$

$4x = 450000$

$x = 112500$

Таким образом, 112 500 мужчин, участвовало в строительстве оборонительных сооружений.

2) 450000 – 112500 = 337 500 (чел.) - женщины.

Ответ: 337 500 женщин участвовало в строительстве.

Пример 2.

Завод в Нижнем Тагиле в январе 1942 г выпустил в 10 раз меньше танков, чем в феврале 1942. Всего за два месяца было выпущено 825 танков. Сколько танков было выпущено в феврале?

Решение.

Пусть $\boldsymbol{x}$ танков было выпущено в январе, тогда в феврале $\mathbf{10}\boldsymbol{x}$ – танков. Знaя, что за два месяца выпущено 825 танков, составим уравнение:

$x + 10x = 82$

$11x = 825$

$x = 75.$

75 танков выпущено в январе.

Тогда в феврале выпущено: 75*10 = 750 (т.).

Ответ: 750 танков было выпущено в феврале.

Пример 3.

Советская артиллерийская промышленность за годы войны изготовила минометов в 4,5 раза больше, чем в Германии, а в Германии в 3 раза меньше, чем в США и странах Британской империи. Всего данные страны изготовили 663 935 минометов. Сколько минометов было выпущено в каждой стране?


Решение.

Пусть $\boldsymbol{x}$ минометов изготовила в Германии за годы ВОВ, тогда в США и странах Британской империи $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ – минометов, а в Советском союзе $\mathbf{4{,}5}\ \boldsymbol{x}$ – минометов. Зная, что всего было изготовлено 66 3935 минометов, составим уравнение:

$x + 3x + 4{,}5x = 663\ 935$

$8{,}5x$=663 935

$x = 78\ 110.$

Таким образом, 78 110 минометов изготовлено в Германии $3 \cdot 78110 = 234330$ минометов изготовлено в США и странах Британской империи $4{,}5 \cdot 78110 = 351\ 495$ минометов изготовила Советская артиллерийская промышленность за годы войны.

Ответ: 351 495минометов, 234330 минометов, 78 110минометов.

Легендарный реактивный миномет Второй мировой войны – оружие Великой Победы ***«Катюша»***.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1 На поле боя у бойца Дмитрия в 3 раза больше гранат, чем у Александра. Когда Дмитрий передал 5 гранат Александру, то гранат у них стало поровну. Сколько гранат было перед боем у каждого из бойцов?

Задача 5.2 На складе стрелкового оружия было 108 единиц. Второй роте было выдано на 48 единиц больше, чем первой. Третья рота получила на 12 единиц меньше, чем первая и вторая вместе. Сколько единиц стрелкового оружия было выдано каждой роте?

Задача 5.3 Разведчик получил приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно должно вернуться к эскадре. Спустя какое время после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 60 узлов, а скорость эскадры 40 узлов.

Занятие 6.

Зачет по спецкурсу «Математика в решении военно-прикладных задач».

Задача 1. Во время боевых учений, по реке навстречу друг другу вышли два катера. Катер «Стремительный» вышел в 14 часов из пункта В и движется в направлении пункта А по течению реки со скоростью 25 км/ч.

В 15 часов из пункта А выходит катер «Отважный» и движется со скоростью 20 км/ч навстречу катеру «Стремительный» с целью уничтожить его во встречном бою. Скорость течения реки 3км/ч. Определите собственную скорость каждого катера, возможные время и рубеж встречи подразделений сторон, если расстояние между пунктами А и В равно 70 км.

Задача 2. Шесть бывших сослуживцев при встрече обменялись рукопожатиями. Сколько всего рукопожатий при этом получилось?

Задача 3. Справа от входа в каждую палатку на табличке указываются ее номер и старший (воинское звание, фамилия и инициалы).
Размеры табличек: длина – 20 см, ширина – 15 см.

Какое наименьшее количество листов жестянки с размерами: 1 м на 25 см понадобится для изготовления 35 таких табличек?

Задача 4. Армейская палатка представляет собой параллелепипед длиной 5,2 м, шириной 3,6 м и высотой 2,5 м с двускатной крышей, приподнятой на 80 см. Определить объем палатки и количество палаточного материала, необходимого для ее изготовления.

Замечание: площадь треугольника мы еще не умеем вычислять. Поэтому рассмотрите палатку с плоской крышей.

Задача 5. Группа разведчиков получила боевую задачу: она должна на лодках, отчалив от пристани А, за 4 часа спуститься вниз по течению до устья, впадающего в него притока и за 3 часа подняться по притоку, чтобы прибыть к пристани В (против течения). Весь путь равен 85 км. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 1 км/ч.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Ответы к занятию 1

1.1. 5ч.

1.2. 5ч.

Ответы к занятию 2

2.1. 20.

2.2. 120.

Ответы к занятию 3

3.1. 42 000 км^2.

3.2. 750 000 км^2.

3.3. 30

Ответы к занятию 4

4.1. ≈82 м^3.

4.2. 20м^2.

Ответы к занятию 5

5.1. 5 гранат и 15 гранат.

5.2. 6 единиц, 54 единицы и 48 единиц.

5.3. 2,5 часа

Ответы к занятию 6

1. 22 км/ч и 23 км/ч.

Через 1 ч в 20 км от пункта А.

2. 15.

3. 6

4. 46,8 $м^3$; 62,72 $м^2$.

5. 12 км/ч

РАЗДЕЛ 2.
6 класс
«Отчизне служат координаты»

Введение.

Программа спецкурса для 6 классов «Отчизне служат координаты» является интегрированной и предметно-ориентированной.

В программе используются темы курса математики и географии, практическое применение которых позволяет кадетам решать задачи военно-прикладной направленности: координаты на плоскости, изображение различных фигур по координатам точек, масштаб, чтение планов и карт. Темы для спецкурса выбраны не случайно. Грамотные расчеты, быстрота и точность управления оружием, качество принимаемых решений – важнейшие условия успеха в современных военных действиях. В основе успеха лежит точный расчет и логико-математические методы оценки обстановки.

Программа ориентирована на формирование умений использовать полученные знания для решения военных практико-ориентированных задач.

Изучаемые темы в математике и географии: координаты на плоскости, масштаб, отношения и пропорции, виды изображений поверхности, применяются в военной теории и практике. Кадету, как будущему офицеру, так и солдату, необходимо развивать умения распознавать, анализировать, оценивать, интерпретировать, модифицировать математические модели в задачах военно-прикладного характера, что в свою очередь будет способствовать формированию умений быстро оценивать ситуацию и принимать верное решение при выполнении военно-стратегических задач.

Цели данного курса: углубление и расширение знаний учащихся по изучаемым темам; на примерах решения военно-прикладных задач показать значимость математики и географии в военном деле; ориентировать обучающихся к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики 6 класса; помочь овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности; развивать умение переводить различные задачи на язык математики; научить использовать знания для описания и решения задач с военной составляющей.

Тематическое планирование

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	Кол-во часов	Характеристика видов деятельности обучающихся	Форма контроля
1. Чтение плана местности, условных знаков.	1 ч.	Условные знаки плана. Стороны горизонта на местности и на плане. Относительная и абсолютная высота точки местности. Особенности изображения населенного пункта (села, города или части города), суши и океанов. Определение (примерно) местонахождения объекта. Определение по глобусу и карте расстояний и направлений. Чтение плана местности.	Самостоятельная работа
2. Масштаб	1 ч.	Масштабы плана. Условные знаки и масштабы карт. Знакомятся с видами масштабов, используют понятие масштаба для чтения планов и карт, для составления планов Использование планов местности в военной области. Нахождение расстояний между военными объектами и их изображение на карте.	Самостоятельная работа
3. Военная топология	1 ч.	Шкала высот и глубин. Абсолютная высота. Использование геометрического языка для описания предметов окружающего мира. Изучение тактических свойств местности. Работа с картографическими источниками: нанесение элементов рельефа.	Самостоятельная работа
4. Морские карты	1 ч.	Работа с картографическими источниками: нанесение объектов гидрографии. Описание объектов гидрографии. Определение по шкале глубин и высот, абсолютной высоты и глубины точек земной поверхности. Исследование	Самостоятельная работа

		вопроса: «Как проложить фарватер для военных судов?»	
5. Военно-тактическая игра в координатах	1ч.	Чтение и анализ карт. Определение по плану объектов местности, сторон горизонта по компасу, плану, Солнцу; направления, расстояния. Определение широты, долготы по физической карте и глобусу; определения по шкале глубин и высот, абсолютной высоты и глубины точек земной поверхности. Решение задач военно-прикладного характера	Практическая работа
Итого			5часов

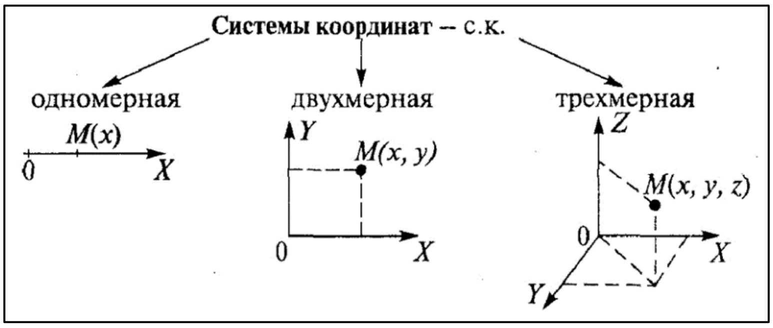
Занятие 1.

Чтение плана местности, условных знаков.

Теоретическая часть по теме «Координаты»

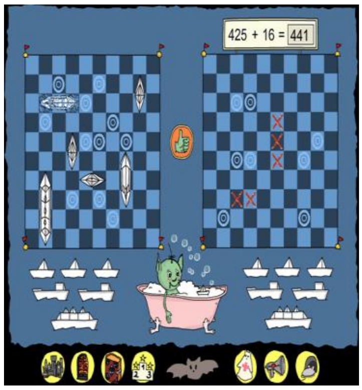
Рене Декарт – великий философ, французский математик, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, предложивший свою систему координат в математике. Именно он придумал в 1637 году систему координат, которая используется во всем мире и известна каждому школьнику. Ее называют «Декартова система координат»

Прямолинейная система координат на плоскости или в пространстве (обычно с взаимно перпендикулярными осями и одинаковыми масштабами по осям).



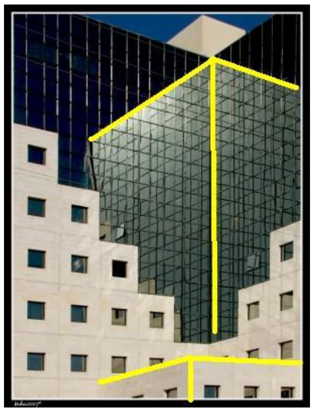
Кто умеет играть в шашки и шахматы, знает, что вертикальные полосы обозначаются цифрами, а горизонтальные – буквами.

Те, кто в детстве играл в морской бой, помнят, что каждая клеточка на игровом поле определялась двумя координатами:

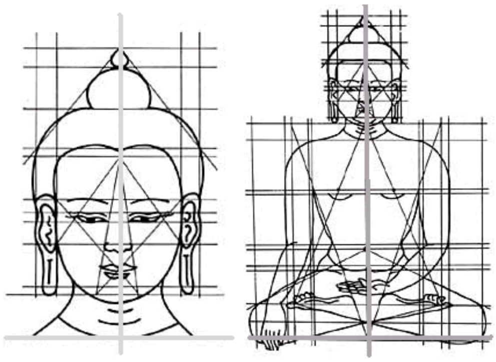


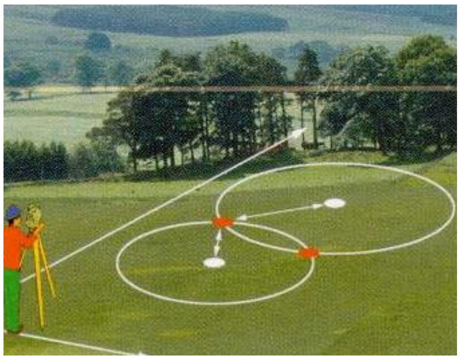
С помощью системы координат, астрономы определяют расстояние до звёзд, их месторасположение на карте звёздного неба, размеры галактики, скорость её вращения, траекторию движения планет и их размер.

Архитекторы используют систему координат в своих расчётах по проектированию строительных объектов.

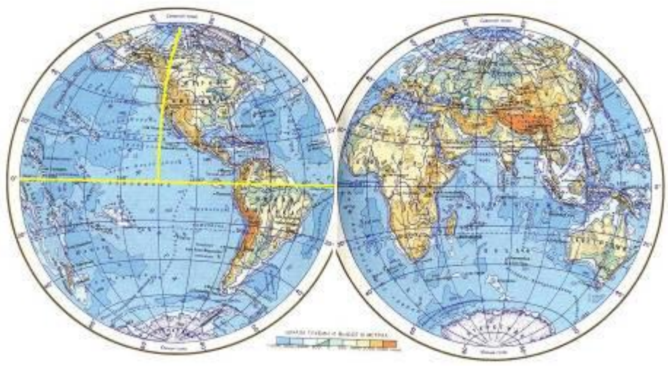


Геометрия — это одна из наук, которая наиболее ярким способом использует систему координат.





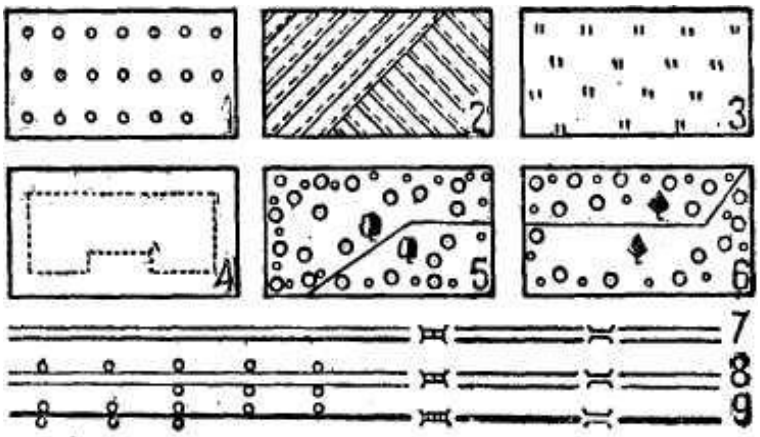
В географии система координат используется достаточно давно. Широта и долгота – оси декартовой системы координат.



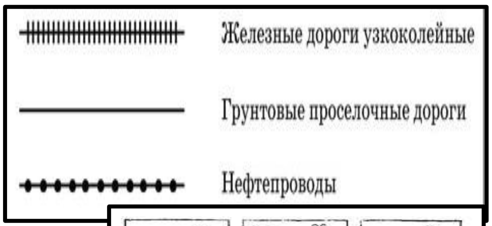
Теоретическая часть «Чтение плана местности, условных знаков»

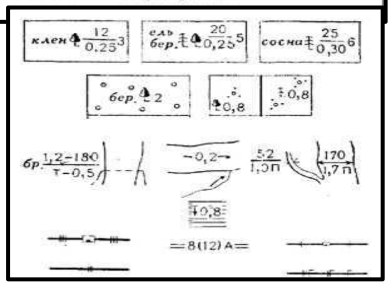
План местности — это **чертёж** небольшого участка в крупном масштабе при помощи условных знаков без учёта кривизны земной поверхности. К элементам плана относят условные знаки, масштаб, определение направлений. Все крупные предметы на плане изображаются сверху. По плану в отличие от снимка из космоса можно узнать направление течений рек, названия объектов, глубины и многое другое.

Условные знаки — это символы, которыми обозначают на плане или карте предметы местности. Для удобства опознавания и использования их обычно делают похожими на сами объекты.



Контурными называют знаки, выражающиеся в масштабе карты (леса, населенные пункты, болота, озера и т.д.). Такой знак состоит из внешней границы контура, заполненного значками или цветным фоном, показывающим сущность





Линейные условные знаки применяют для изображения дорог, рек, линий связи, электропередач и т.д. они в масштабе карты передают только длину объекта, ширина же значительно увеличенной.

Пояснительные знаки передают дополнительную характеристику объектов: видовой состав леса, направление течения рек, их ширину, глубину и многое другое объекта.

Планы бывают:

✓ навигационными морскими — предназначены для плавания, постановки судов на рейдах, в гаванях, бухтах и портах (строятся в масштабах 1:500 – 1:25000);

✓ городов — показывают схемы наземных и подземных транспортных путей, расположение городских объектов, планировку;

✓ участков, составленные перед постройкой зданий для планировки коммуникаций, ландшафтного проекта, получения разрешения на застройку и др.;

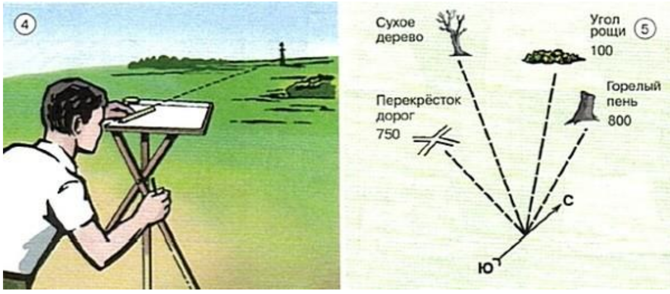
✓ пожарной эвакуации из здания.

Как составить план местности

1. Лист бумаги в клетку закрепляем на фанере или планшете. В левом верхнем углу закрепляем компас, ориентируя букву С (Север) вверх (к верхнему краю листа).
2. Выбираем точку (полюс) — место откуда будем снимать местность. Лучше всего панорама просматривается с возвышения. Точка должна быть в центре снимаемой площади, откуда она вся хорошо видна. Именно поэтому такая съёмка местности и называется полярной — её производят из одной точки.
3. Выбираем масштаб плана. Измеряем расстояние на местности, которое нам нужно будет нанести на лист. Пусть оно **максимально** равно 300 м. Измеряем свой лист — 10 см х 10 см? Чтобы правильно подобрать масштаб, делим 300 на 10, получаем 30. Наш масштаб — в 1 см 30 м. Подписываем масштаб внизу листа бумаги, чертим линейный масштаб.
4. Ориентируем планшет на север, в верхнем углу плана наносим стрелку вверх и подписываем север-юг. При работе постоянно следим, чтобы

стрелка компаса показывала на север. После ориентирования ставим точку на листе бумаги, обозначая место, откуда мы будем снимать (мы выбрали её ещё в начале).

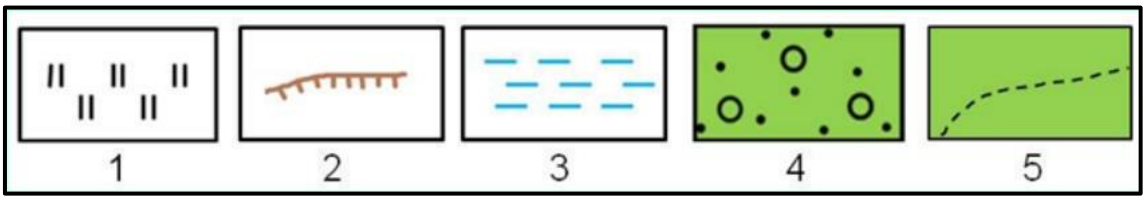
5. Делаем визирование на основные ориентиры при помощи визирной линейки—определяем направление и чертим тонкую линию карандашом на бумаге.



Задачи по теме «Чтение плана местности, условных знаков»

1. Попробуем с вами сделать топографический план местности, на котором будет происходить военное сражение. Для начала сделаем рамку. От каждого края отступи по 1 см и начертим рамку. С Юго-Запада на Северо-Восток протекает река Вятка, с направлением течения на Северо-Восток, глубина 25м. Через реку проходит деревянный мост. На востоке располагается холм высотой 40м, горизонтали идут через 10м. С Северо-Запада лиственный лес. С Северо - Запада овраг. Вдоль левого берега реки растут кусты. На Юге располагается деревня Сорокино. На севере болото. С Северо-Запада в лесу располагаются немецкие танки. С Юго-Восточной стороны, восточнее от деревни Сорокино располагаются русские танки. Показать стрелками план наступления.

2. Подберите номер, по которым изображен условный знак, соответствую щей букве, обозначающей его значение. Например: 1–А; 2–Б; А–обрыв; Б–болото; В–тропа; Г–кустарник; Д–луг.



3. Изобразите план местности в системе координат, если объекты заданы координатами: штаб–(5; -2), полигон–(-3;-4), лазарет–(-4;-6), военный лагерь – (-2;5).

4. Определите расстояние до танка противника, если по высоте его видим ая часть укладывается в трех четвертях одного деления шкалы дальномера

бинокля. Высоту видимой части танка наблюдатель установил равной 2м, цена деления дальномера бинокля равна 5 тысячным радиана. (Радиан–0,99)

5. Маршрут движения танковой колонны состоит из трех участков протяженностью соответственно 68 км, 84 км, 53 км. Установлено время рекогносцировки, что на втором участке можно двигаться в полтора раза быстрее, чем на первом. А на третьем участке на 25% медленнее, чем на втором. С какими скоростями необходимо двигаться колонне на участках маршрута, чтобы средняя скорость движения ее на всем маршруте была равна 25 км/час.

6. В смешанной колонне, состоящей из трех отдельных колонн, насчитывается 320 машин. Определить время, необходимое для преодоления колонной реки шириной 350 м по наплавному мосту и заболоченной гати длиной 2,5 км (1 км с одной стороны и 1,5 км с другой), если скорость движения по гати и мосту равна 8 км/час. Дистанции между машинами и колоннами сокращенные и равны соответственно 25 м и 1 км. Средняя длина машины в колонне равна 13 м. Рассмотреть два варианта: а) без учета длин машин; б) с учетом длин машин.

7. Голова колонны танковой части, состоящая из четырех подразделений, проходит последний пункт регулирования в 11.30. Глубины колонн подразделений соответственно равны 2,5 км, 2,8 км и 4,5 км, а дистанция между ними 2км. Расстояние от последнего пункта регулирования до границ районов сосредоточения подразделений соответственно равны 59км, 52км, 54км, 32км. Глубины районов сосредоточения подразделений не превосходят 2,5 км. Определить время окончания сосредоточения танковой части, если скорость движения подразделений до границ их районов равна 25 км/час, а скорость втягивания равна 12 км/час.

8. Разведка в 15.10 зафиксировала прохождение головы колонны войск противника через пункт А, а в 15.23-через пункт В. Определить к какому времени колонна противника переправится через реку по наведенному мосту, если известно, что АВ=5,6км; ВС=36,3км, глубина колонны Гк=9,6км, длина моста 600м и скорость движения по нему 12км/час.

9. Командир 2 взвода 7 роты 76 полка ВДВ гвардии лейтенант Бывалый получил задачу на оборудование опорного пункта взвода. Командир взвода поставил задачу подчинённым на рытье окопов, траншей и трёх перекрытых щелей размером 1,5 м х 4 м. Для оборудования перекрытых щелей командир взвода отправил командира 1 отделения сержанта Сидорова на БМП за досками размером 25 см х 200 см. Сколько досок должен привезти сержант, чтобы перекрыть сверху три щели?

10. Начальник инженерной службы 102 танковой бригады для обеспечения обороноспособности пункта временной дислокации поставил задачу командиру инженерно-саперной роты капитану Тротилову оборудовать минно-взрывные

заграждения на участке, имеющим форму прямоугольного треугольника размером 2500 м х 2000 м, с плотностью минирования 90 мин на квадратный километр. Сколько мин понадобится командиру роты для выполнения боевой задачи?

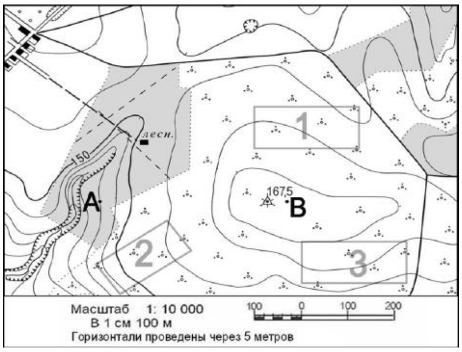
11. Командованием полка было решено замаскировать пункт командования. Пункт имеет один этаж размерами 1500 см х 2000 см и высотой 250 см. Найдите площадь покрытия и расход краски, если на 5 квадратных метра приходится 1 банка краски.

12. Большинство отечественных снайперов обычно брало с собой 120 винтовочных патронов. Причём из них около 60%—патроны с лёгкой или тяжёлой пулей, 25%—патроны с бронебойно-зажигательной пулей и 15%–с зажигательной и трассирующей пулями. Какое количество патронов с разными видами пуль брали в бой снайперы?

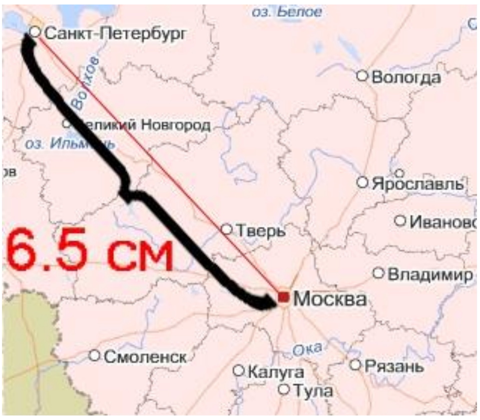
Занятие 2.
Масштаб.

Теоретическая часть к теме «Масштаб»

Масштаб–это степень уменьшения земной поверхности на плоскости по отношению к реальным размерам. Отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности в действительности называют масштабом. Масштаб показывает, во сколько раз расстояние на плане или карте меньше, чем расстояние на местности.



Мы познакомились только с одной областью применения масштаба, а именно, при изображении участков земли на карте. На практике приходится выполнять изображения очень крупных деталей. (например: машины, деталей самолета, корабля) и очень маленьких (модель атома, деталей часового механизма и др.).



Поэтому, при вычерчивании, изображения больших деталей уменьшают, а маленьких – увеличивают. Для этого тоже применяют масштаб. Об этом подробнее будете говорить на уроках черчения.

Рассмотрим решение задачи по теме «Масштаб»

Задача 1: Санкт – Петербург и Москва на карте соединены отрезком в 6,5 см. Определите расстояние между городами в реальности, если масштаб карты 1:10000000.

Решение: для решения задачи составим таблицу и внесем в нее соответствующие данные.

	На карте	В реальности
Масштаб	1 см	10000000 см
Расстояние	6,5 см	х см

По данным таблицы составим пропорцию: $\frac{1}{6,5} = \frac{10000000}{x}$.Решив пропорцию, получим результат: 65000000 см = 650000 м = 650 км.

Ответ: 650 км.

Задача 2. Расстояние между двумя городами равно 400 км. Определите расстояние между изображениями этих городов на карте, если численный масштаб карты равен 1: 5 000 000.

Решение: выразим 400 км в сантиметрах: 400 км = 40 000 000 см. А теперь уменьшим полученное число в 5 000 000 раз: 40 000 000: 5 000 000 = 8 см. Значит, на карте расстояние между изображениями этих городов будет равно 8 см.

Чем крупнее масштаб карты, тем больше объектов и с большими подробностями показывается на ней при изображении данной территории. С уменьшением масштаба карты сокращается информационная емкость изображения на ней различных объектов.

Задачи по теме «Масштаб»

1. Расстояние между городами А и В на карте изображено отрезком в 100 раз меньше, чем на местности. Каков масштаб карты?

2. Масштаб карты 1:5000. Во сколько раз расстояние на местности больше отрезка, изображающего это расстояние на карте?

3. Масштаб карты 1:400 000. Отрезком какой длины обозначается на ней расстояние 4км.

4. Масштаб карты 1:20 000 000. Каково расстояние между двумя пунктами, если на карте оно изображено отрезком 4 см.

5. 10 см на карте соответствует 10 км на местности. Определите масштаб карты.

6. Расстояние от Великого Новгорода до Москвы по карте России соответствует 2 см, масштаб карты 1:25 000 000. Определите расстояние между городами.

7. Определите длину военного плаца по плану, если на плане его длина 4 см, а масштаб плана в 1 см-10 м.

8. Длина отрезка на местности 4,5 км. Чему равна длина этого отрезка на карте, сделанной в масштабе 1:100 000?

9. Длина железнодорожной магистрали 1500 км. Какой длины получится линия, изображающая эту магистраль на карте, сделанной в масштабе: а) 1:100000000; б) 1:2000000?

Занятие 3.

Военная топология.

Теоретическая часть к теме «Военная топография»

Слово **«топография»** произошло от греческих слово t**opos** – место, местность и **grapho** – пишу, дословно в переводе – описание местности. В современном понимании это наука, подробно изучающая геометрию земной поверхности, для того чтобы правильно изобразить ее на плоскости в виде планов и карт. Основная задача топографии – получение точных данных о формах земной поверхности(рельефе), а также расположении на ней природных и созданных человеком географических объектов.

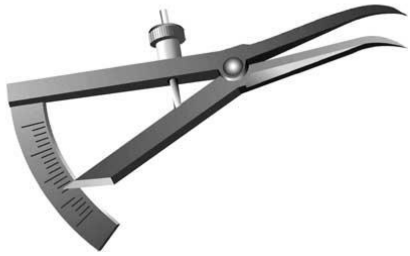
Военная топография, одна из специальных военных дисциплин, помогает изучать местность в интересах боевых действий войск и учит использовать топографические карты при выполнении различных боевых задач.

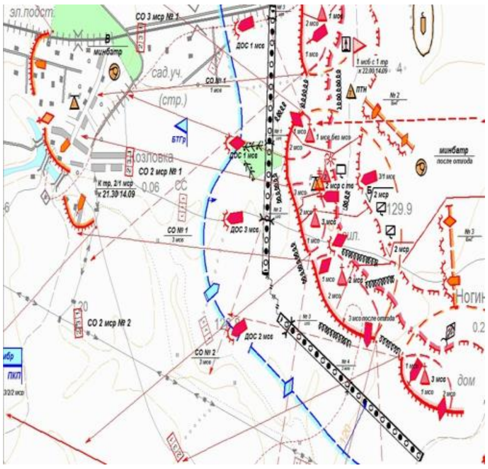
Топографическая карта – конечный результат полевых и камеральных работ, которые включают изучение земной поверхности, измерения на ней и графические построения на бумаге. Топографические карты служат основным средством ориентирования на марше и в бою. Для топографических карт установлен масштабный ряд (табл.).

Масштаб карты	**Величина масштаба**	**Название карты**
1:10000	100 М	Десятитысячная
1:25000	250 М	Двадцатипятитысячная
1:50000	500 М	Пятидесятитысячная
1:100000	1 КМ	Стотысячная
1:200 000	2 КМ	Двухсоттысячная
1:500 000	5 КМ	Пятисоттысячная
1:1000 000	10 км	Миллионная

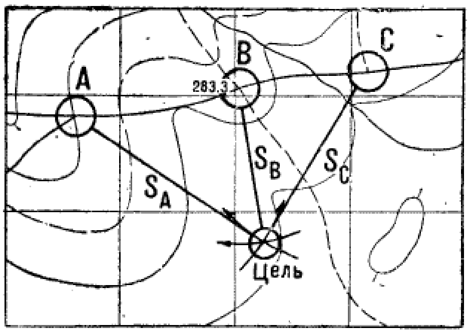
По топографической карте можно решать самые задачи: определять расстояния, площади, высоту сечения рельефа и абсолютную высоту точек, превышение точек, крутизну ската, взаимную видимость между точками, строить профили и другие. Рассмотрим подробнее одну из задач «–измерение расстояний по карте», которые можно применить в полевых условиях на практических занятиях в школе.

Определение расстояний по карте можно различными способами: линейкой; циркулем-измерителем; курвиметром; плоской бумаги и т.д.

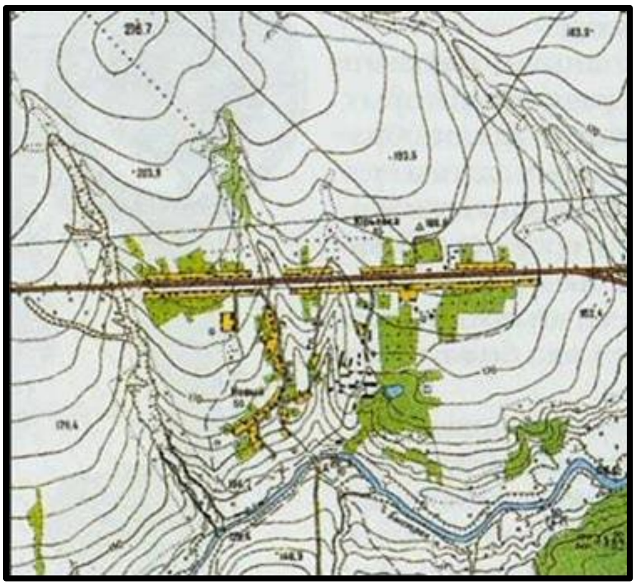




Топографической картой, на которой графически при помощи условных знаков и сокращенных обозначений отображается тактическая обстановка и ее изменения в ходе боя, называется ***рабочей картой*** того ***командира***, который ее ведет. С помощью рабочей карты командир может уяснить полученную боевую задачу, изучить и оценить обстановку, принять решение, поставить боевые задачи подчиненным подразделениям, отдать указания по взаимодействию, боевому, тыловому и техническому обеспечению, составить донесение старшему начальнику, информировать соседей, двигаться по местности, на которой трудно ориентироваться, решать огневые задачи по подавлению или уничтожению противника.



Наверно, всем понятно выражение – «**Топографы»** – это глаза армии». Ни одна военная операция не проходила без карт. Карта – это необходимый источник информации о местности, средство ориентации и управления войсками. В годы войны отряды военных и гражданских геодезистов, топографов и картографов самоотверженно трудились, чтобы обеспечить армию картами. Театр военных действий раскинулся – от Баренцева до Черного морей. Только с июля по декабрь 1941 г. геодезисты, топографы и картографы выполнили съемку местности на площади более 500 тыс. кв. км, составили, издали свыше 2000 листов карт разного масштаба. Особо следует отметить героический труд картографов, оставшихся в блокадном Ленинграде. В условиях жесткой блокады под обстрелом немецкой артиллерии в условиях холода и голода ленинградцы составляли, чертили, печатали карты, не прерывая работу ни на один день. Топографическая разведка осуществляется различными способами и зависит в основном от обстановки, характера и положения разведуемых объектов, запаса времени, сил и средств. Основными способами топографической разведки являются: изучение и обработка аэрофотоматериалов; непосредственное обследование объектов; обработка топогеодезических материалов; прогнозирование изменений местности; обработка данных других видов разведки; допрос пленных и опрос местных жителей. Обработка аэрофотоснимков заключается в дешифрировании объектов местности и фотограмметрических измерениях. Результаты обработки наносят на топографическую карту или фотодокумент. Этот способ позволяет использовать аэрофотоматериалы на глубину задач войск и своевременно получать информацию об изменениях местности, занятой противником. По этим материалам надежно определяются места переправ на реках, участки с наилучшими маскирующими и защитными свойствами и ряд других ценных сведений для войск. Топографический план – это изображение небольших участков земной поверхности, данное в масштабе с помощью условных знаков.



Карты масштаба 1:10 000 (1:25 000) – самые подробные и точные, предназначены для детального изучения и оценки отдельных небольших участков местности командирами подразделений и частей при форсировании водных преград, высадке воздушных и морских десантов, ведении боевых действий в городах, строительстве инженерных сооружений. Они используется также для точных измерений и расчетов при планировании и выполнении мероприятий, но инженерному оборудованию местности и топогеодезической подготовки стрельбы.

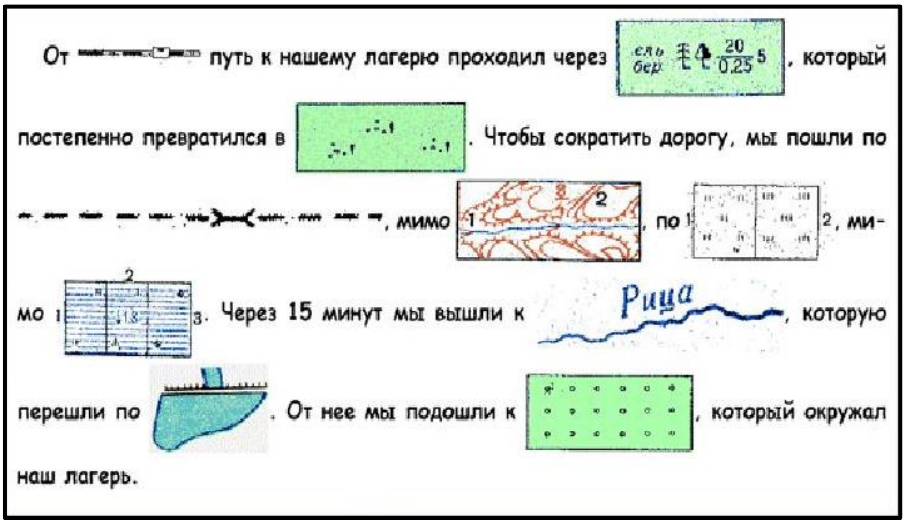
Карта масштаба 1:50000 предназначена для изучения и оценки местности, ориентирования, целеуказания и используется, как правило, подразделениями и частями в различных видах боя, особенно при организации обороны. В наступлении она используется для изучения и оценки местности при прорыве обороны противника, преодолении водных преград, высадке воздушных и морских десантов, а также при ведении боевых действий за населенные пункты. Эта карта используется также для топогеодезической подготовки стрельбы, проектирования военно-инженерных сооружений и выполнения расчетов по инженерному оборудованию местности.

Карта масштаба 1:100000 предназначена для изучения местности и оценки ее тактических свойств при планировании боя, организации взаимодействия и управлении войсками, ориентирования на местности и целеуказания, топогеодезической привязки элементов боевых порядков войск, определения координат объектов (целей) противника. Она также используется при проектировании военно-инженерных сооружений и выполнении мероприятий по инженерному оборудованию местности.

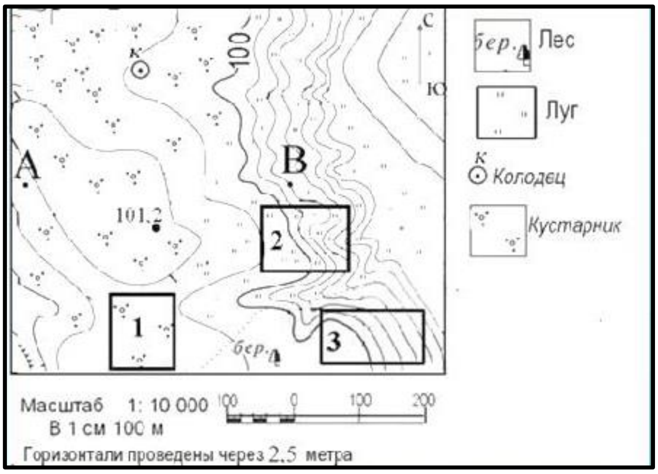
Условные знаки – это графические обозначения, показывающие положение какого-либо объекта на местности и передающие его качественную и количественную характеристику. В РФ и странах СНГ используется 465 условных знаков (в США - 243, во Франции - 288. в ФРГ - 231).

Задачи по теме «Военная топография»

1. По условным знакам группы разведчиков составь отчет о ее продвижении в военному лагерю.

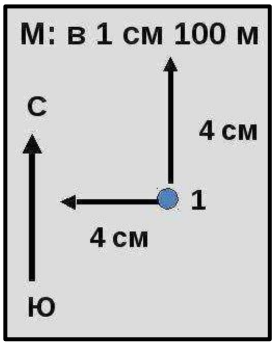


2. Группа минеров, выполнив, свою боевую задачу, зашифровала обратный путь условными знаками, возвращаются на свою базу (лагерь). Выполни дешифровку представленной ниже схемы.



3. Ответить на вопрос задачи. Определите по карте расстояние на местности по прямой от точки А до колодца. Измерения проводите между точкой и центром условного знака. Полученный результат округлите до десятков метров. Ответ запишите в виде числа.

4. Составить топографическую карту плана движения десантной группы, выполняющей боевую задачу. Десантная группа дислоцировалась в горном районе на высоте 1200м над уровнем моря, от подножия горы они продвинулись на север 3000м, где находился запасной аэродром, после этого группа пересела на БМП и 25 км поехали на восток. На северо-западе от места прибытия в 2,5 км находился госпиталь и к востоку – штаб армии в 4 км. Задайте масштаб, соответствующий условию. (См. образец)

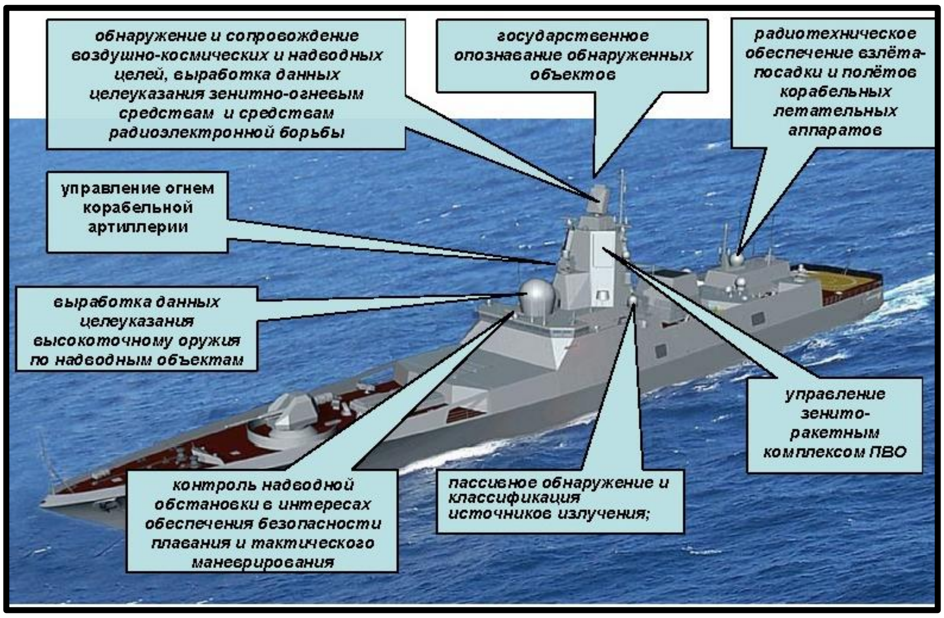


5. Прочитайте и запишите рассказ по условным знакам .

Занятие 4.
Морские карты.

Теоретическая часть к теме «Морские карты»

Морские карты – предназначены для обеспечения кораблевождения и решения различных задач, связанных с деятельностью военно-морского, торгового и промыслового флотов. Основную группу этих карт составляют навигационные карты, которые используются для расчетов при подготовке и проведении боевых действий флота, для прокладки курса корабля и определения его местонахождения, выбора стоянок. По градусной сети можно определить направление и расстояние, но мы не знаем, где находится объект, до которого нам нужно добраться. Конечно, вы затрудняетесь ответить на эти вопросы, так как не изучили еще одно понятие - географические координаты. Что же такое координаты и как их определить, как найти по координатам корабль на карте? Что именно передает радист в эфир? Уметь определять координаты по карте должен каждый человек. Для некоторых профессий это особенно важно, например, для штурманов и военных. Штурманы прокладывают путь корабля с помощью географических координат.



Геологи, географы, геодезисты, находясь в экспедициях, определяют координаты исследуемых ими объектов. Иногда приходится искать в открытом океане терпящих кораблекрушение, а для этого необходимо знать место их нахождения. И наша с вами задача научиться определять географические координаты, т.е. географическую широту и географическую долготу.Задачи, решаемые радиолокационной техникой на надводных кораблях ВМФ

Морская миля – это единица измерения расстояния, используемая мореплавателями равна 1852 м. Узел – это линейная скорость, составляющая одну морскую милю в 1 час (1,852 км/ч) или 0,514 м/с. Прибор, измеряющий скорость и пройденное расстояние, называют лагом.

Задачи к теме «Морские карты»

1. Маршрут движения морской пехоты состоит из трех участков: 68 миль,84миль, 53 мили. Распределено время, что на втором участке можно двигаться в полтора раза быстрее, чем на первом. А на третьем участке на 25% медленнее, чем на втором. С какими скоростями необходимо двигаться морской пехоте, чтобы средняя скорость движения была на всем маршруте 25 узлов. (1 узел = 1852м/ч)
2. Для определения скорости течения реки, на моторной лодке проплывают участок реки длиной 16 км вниз и вверх по течению. Определить скорость течения реки, если скорость моторной лодки в стоячей воде 12 км/ч, и вниз по течению плыли на 1 час меньше, чем в обратную сторону.
3. По озеру плывет катер со скоростью 80км/ч, озеро имеет форму круга с диаметром 80 км, сколько времени понадобится катеру, чтобы совершить полный круг по береговой линии озера.
4. Два капитана боевых кораблей назначили место встречи в 5 часов вечера. Часы 1 капитана отстают на 8 минут, но он считает, что часы спешат на 2 минуты. Часы 2 капитана спешат на 2 минуты, но он думает, что они отстают на 8 минут. Кто раньше окажется в пункте встречи, и на сколько минут?
5. Отряд морской пехоты планирует высадится в пункт назначения в 21.30 23.07. и выйти на рубеж развертывания в 7.20 24.07. Определите среднюю скорость отряда, если расстояние до рубежа равно 25 миль.
6. Морское судно по круговой цели с радиусом 630 м наносит удар. Определить ущерб цели, если известно, что эпицентр взрыва удален от центра цели на 0,4 км, а радиус поражения равен 1,6 км.

Занятие 5.
Военно-тактическая игра в координатах.

Задачи по теме «Военно-тактическая игра в координатах»

1. По данным координатам точек выполни рисунок военной темы:

А) (0;6), (2;2), (5;2), (2;0), (4; -4), (0; -2), (- 4; -4), (-2; 0), (-5; 2), (-2; 2).

Б) 1 часть: (-7;0), (-5;2), (9;0), (10;1), (10;5), (9;5), (6;2), (4;2), (7;6), (5;6), (0;2), (-7;0), (0;2), (4;2).

2 часть:(0;1), (6;-3), (8;-3), (4;1), (0;1).

В) 1часть: (-5;3), (-3;5), (6;5), (10;3), (10;1), (9;0), (-2;0), (-5;3)

2 часть: (-5;3), (-10;7), (-3;5),

3 часть: (5;0), (5;-1), (6;-2), (8;-2), (9;-2,5), (8;-3), (-3;-3), (-4;-2,5), (-3;-2), (-1;-2), (-2;-1), (-2;0)

4 часть: (-12;5), (-8;9)

5 часть: (-6;7), (10;7)

6 часть: (2;5), (2;7)

7 часть: (-1;1), (-1;4), (2;4), (2;1), (-1;1)

8 часть: (5;5), (5;3), (10;3).

Г) 1 часть: (-3;-13),(-6;-13), (-3;-5), (-3;6), (0;10), (3;6), (3;-5), (6;-13), (3;-13), (3;-8), (1;-8), (2;-13),

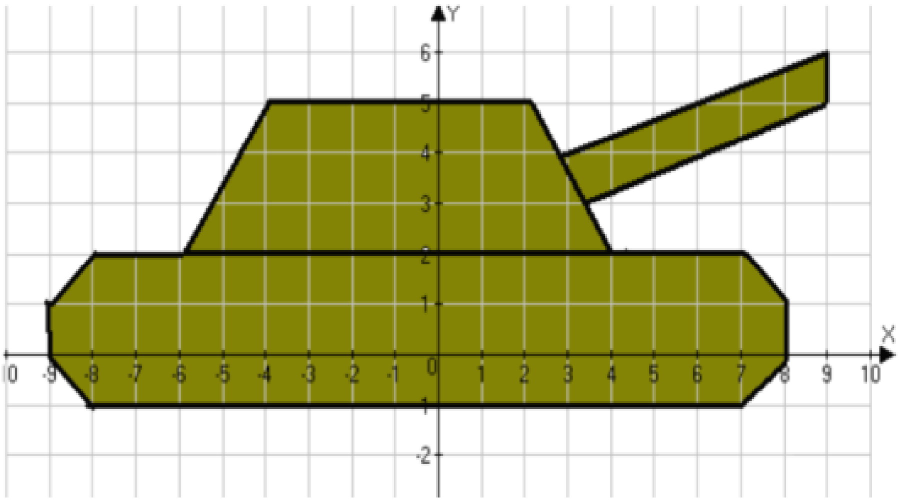
2 часть: (-2;-13), (-1;-8) (-3;-8), (-3;-13).

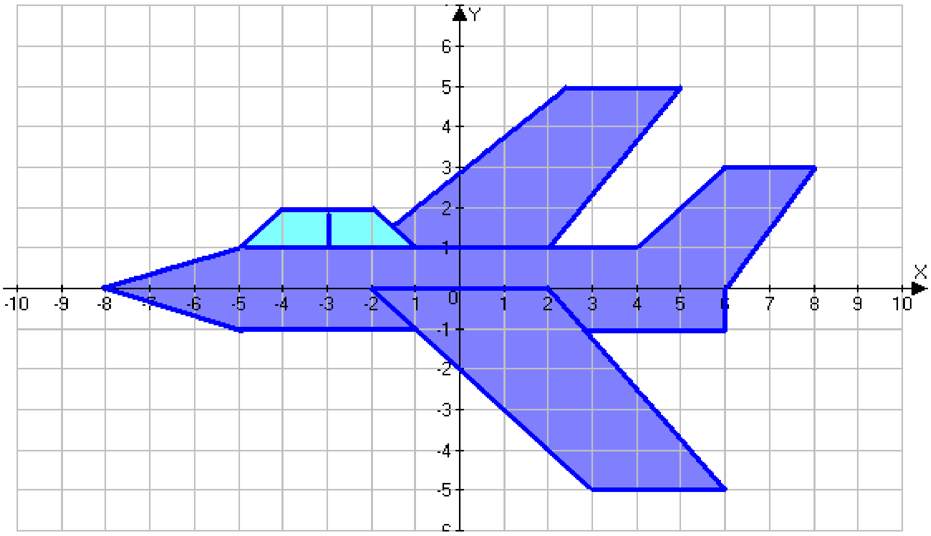
Д) 1 часть: (-7;0), (-5;2), (7;2), (9;5), (10;5), (10;1), (9;0), (-7;0),

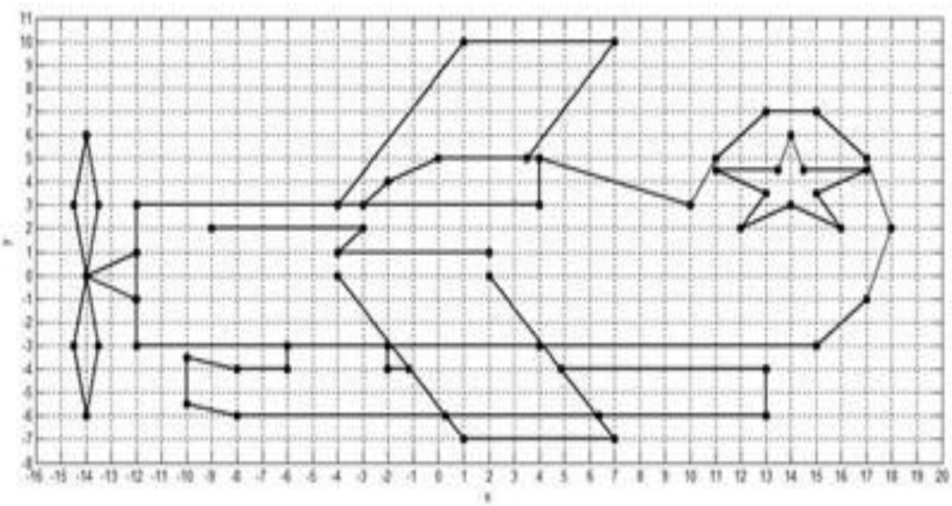
2 часть: (0;2), (5;6), (7;6), (4;2),

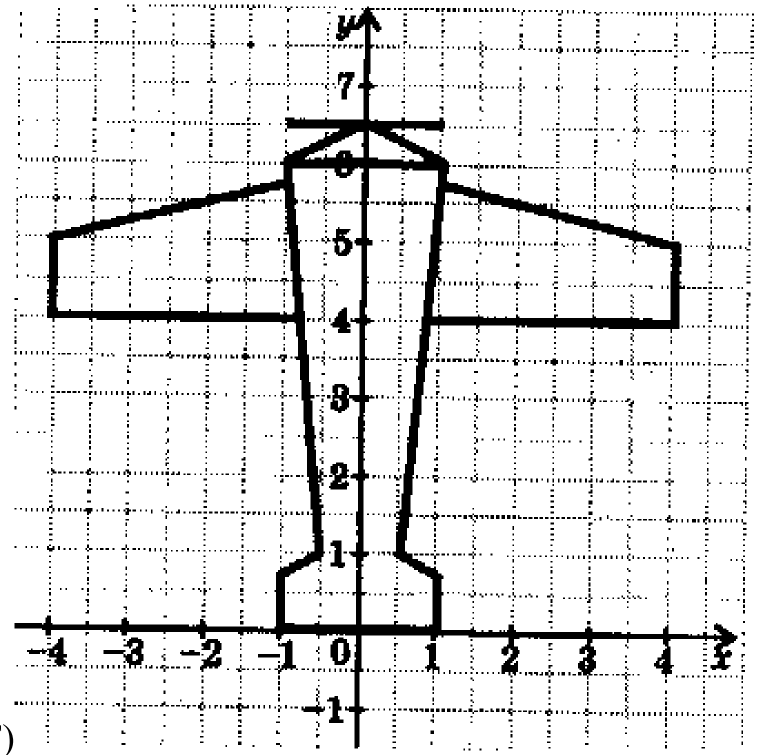
3 часть: (0;1), (6;-3), (8;-3), (4;1), (0;1).

2. По рисунку запишите соответствующие координаты изображения военной техники:

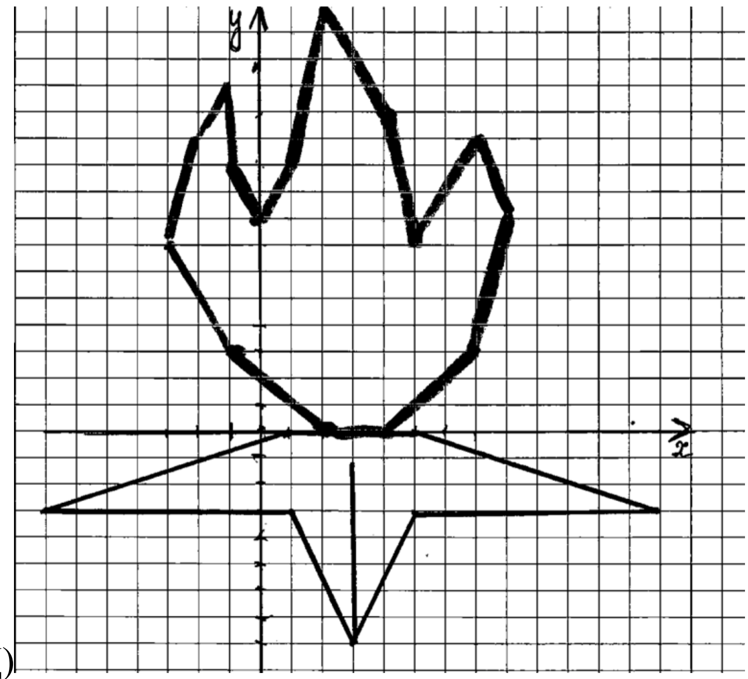
А) 

Б) 

В) 



Г)



Д)

Е) На испытаниях нового танка каждые полчаса отмечали в таблице пройденное расстояние.

t, ч	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
S, км	75	110	140	175	250	280	290	340	380

Отметьте данные таблицы на координатной плоскости, отложив по оси абсцисс время движения танка, а по оси ординат – пройденное расстояние.

Проведите прямую усредняющую эти данные. Определите, чему будет равно расстояние: а) через 6ч после начала движения; б) через 8ч после начала движения; в) через 10ч после начала движения. Запишите уравнение усредняющей прямой.

3. Текстовые задачи

1) У Германии было 5тысяч самолетов, а у России -15 тысяч. Германия уничтожила у России 20% самолетов, а Россия у Германии 60%. Сколько у каждой страны осталось действующих самолетов?

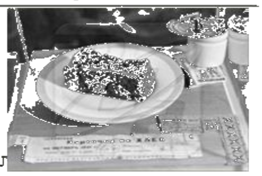
2) Было 100 танков. Экипаж танка из 6 человек. Каждый 5 был доставлен в больницу с ранением, 1/5 часть раненых - дети. Сколько раненых детей было доставлено в больницу?

3) Война длилась 547 дней, но известно, что за всю войну 136дня и 35 минут военных действий не велось. Сколько всего велось военных действий в минутах?

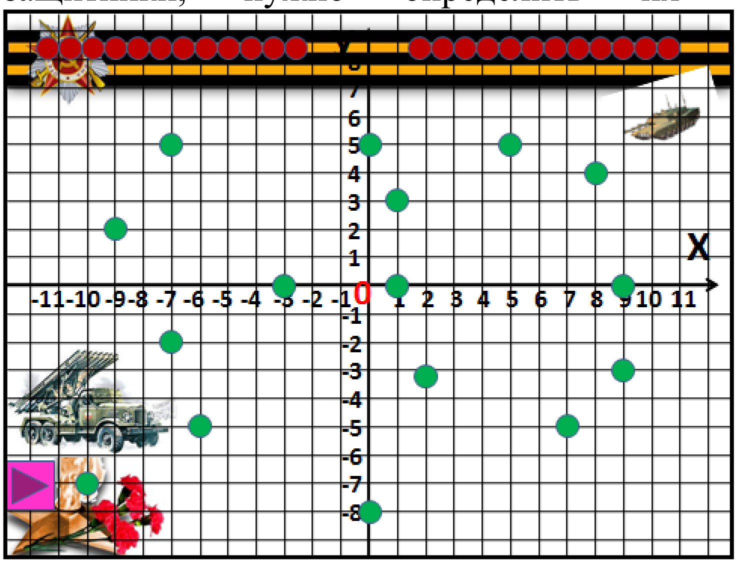
4) 140 грамм хлеба можно было получить по 1 карточке на ребенка, а на взрослого приходилось -160г. Сколько хлеба получит семья из 2 детей и 3 взрослых за 50 дней?

Блокадный хлеб того времени имел следующий состав:

мука ржаная — 40 %,
целлюлоза — 25%,
шроты — 20 %,
мука ячневая — 5%,
солод — 10 %,
жмых (при наличии заменя
отруби (при наличии заменяли шроты).



5). В армии не обойтись без использования системы координат. Итак, вперёд, к победе! Красные точки танки – защитники, нужно определить их координаты. Зеленые точки – вражеские танки, нужно определить координаты и наносить удар.



а) Пока мы обстреливали наши цели, боеприпасы у нас кончились. Но вот, посыльный доставил пакет с донесением: «Груз сбросят ночью в квадрат АВСД: А (-3; -4), В (-3;1), С (2;1), Д (;). Координаты точки «Д» размыты. Надо определить координаты точки Д, построить квадрат, найти его площадь и периметр.

б) Груз доставлен. Давайте узнаем его вес?

В первом ящике снарядов было в 2 раза больше, чем во втором. Если во второй ящик добавить 8 снарядов, а из первого взять 40, то количество снарядов будет одинаково. Сколько снарядов было в каждом ящике первоначально?

4. Задача для шифровальщиков. Определите координаты огневой точки врага.

1) Мы находимся в начале координат;

2) Идём по оси X вправо на 3 единичных отрезка;

3) Затем вверх на 4 единичных отрезка;

4) Далее влево на 5 единичных отрезков;

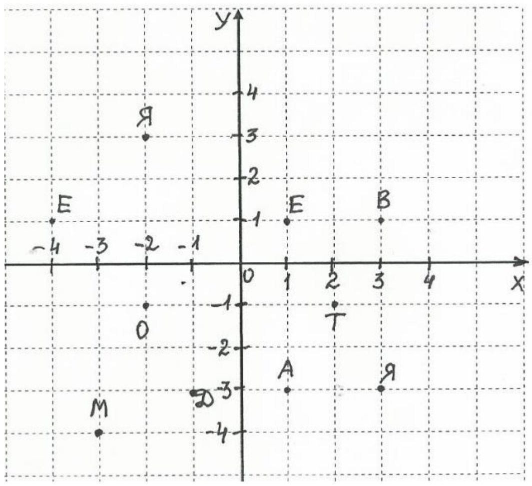
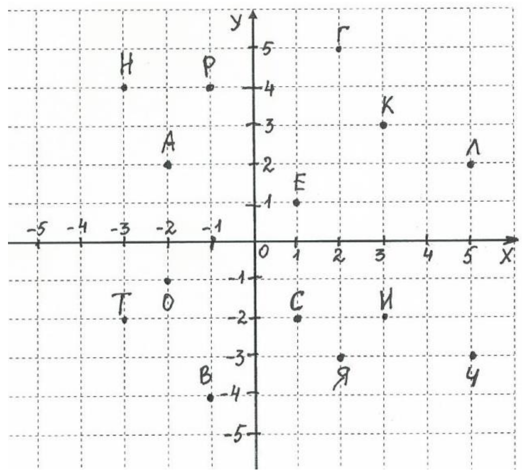
5) Далее вниз на 2 единичных отрезка.

Назовите координаты полученной точки.

5. Что это за даты?

<u>1 часть</u>	<u>2 часть</u>
(-7;1) (-9;1) (-9;3) (-7;3) (-7;-1) (-9;-1) (-9;1) (-6;1) (-5;1) (-4; -1) (-4;3) (-2; 3) (-2; -1) (1;1) (-1;1) (-1; 3) (1;3) (1;1) (-1; -1) (2;1) (3;1) (4;3) (4;1) (6;1) (6;3) (6; -1) (7;1) (9;3) (9; -1).	(-10;3) (-8;3) (-8;1) (-10; -1) (-8;-1) (-7;3) (-5;3) (-7;1) (-7; -1) (-4;1) (-3;1) (-2; -1) (-2;3) (0;3) (0; -1) (-2;-1) (1;1) (3;3) (3; -1) (4;1) (5;1) (6;3) (6;1) (8;1) (8;3) (8; -1) (9;3) (9;1) (11;1) (11;3) (11; -1)

6. На карточках заданы точки на координатной плоскости. Поставьте в соответствии заданным координатам название точки и прочитайте полученные знаки.

1 часть	2 часть
 (-1;-3) (1;1) (3;1) (3;-3) (2;-1) (-2;-1) (1;1) (-3;-4) (1;-3) (-2;3)	 (2;5) (1;1) (-2;-1) (-1;4) (2;5) (3;-2) (1;1) (-1;-4) (1;-2) (3;3) (-2;2) (2;-3) (5;2) (1;1) (3;-2) (-3;-2) (-2;-1) (5;-3) (3;3) (-2;2)

Большинство отечественных снайперов обычно брало с собой 120 винтовочных патронов. Причём из них около 60% — патроны с лёгкой или тяжёлой пулей, 25% — патроны с бронебойно-зажигательной пулей и 15% – с зажигательной и трассирующей пулями. Какое количество патронов с разными видами пуль брали в бой снайперы?

8. Советская артиллерийская промышленность за годы войны изготовила 351 495 минометов, что в 4,5 раза больше, чем в Германии и в 1,5 раза больше, чем в США и странах Британской империи. Сколько минометов было выпущено В Германии и в США?

9. 40% солдат и офицеров, участвовавших в Берлинской операции (2,5 млн. человек), были награждены медалью «За взятие Берлина». Сколько воинов получили эту медаль?

Ответы к задачам по теме «Масштаб»

1. Расстояние между городами А и В на карте изображено отрезком в 100 раз меньше, чем на местности. Каков масштаб карты?

Ответ: 1:100

2. Масштаб карты 1:5000. Во сколько раз расстояние на местности больше отрезка, изображающего это расстояние на карте?

Ответ: в 5000 раз

3. Масштаб карты 1:400 000. Отрезком какой длины обозначается на ней расстояние 4км.

Ответ: 1 см

4. Масштаб карты 1:20 000 000. Каково расстояние между двумя пунктами, если на карте оно изображено отрезком 4 см.

Ответ: 800 км.

5. 10 см на карте соответствует 10 км на местности. Определите масштаб карты.

Ответ: 1:100 000

6. Расстояние от Великого Новгорода до Москвы по карте России соответствует 2 см, масштаб карты 1:25 000 000. Определите расстояние между городами.

Ответ: 500 км

Масштаб: 1:35 0001 см- 350 м

Ответ: 5 км 950 м

7. Определите длину военного плаца по плану, если на плане его длина 4 см, а масштаб плана в 1 см - 10 м.

Решение: 4 х 10 м = 40 м, то есть 4 см — это на местности 40 м.

Ответ: 40 м

8. Длина отрезка на местности 4,5 км. Чему равна длина этого отрезка на карте, сделанной в масштабе 1: 100 000?

Решение. Обозначим длину (в километрах) отрезка на карте буквой X и составим пропорцию: x:4,5 = 1 : 100 000.

Решив уравнение, получим x = 4,5: 100 000 = 0,000045.

Но 0,000045 км = 0,045 м = 4,5 см.

Ответ: длина отрезка на карте 4,5 см.

9. Длина железнодорожной магистрали 1500 км. Какой длины получится линия, изображающая эту магистраль на карте, сделанной в масштабе:

а) 1:10 000 0000 ; б) 1 : 2 000 000?

а) *Решение:*

На карте	На местности
1 см	100000000см=1000км
Х см	1500 км

Х =1500:1000=1,5 см

б) *Решение:*

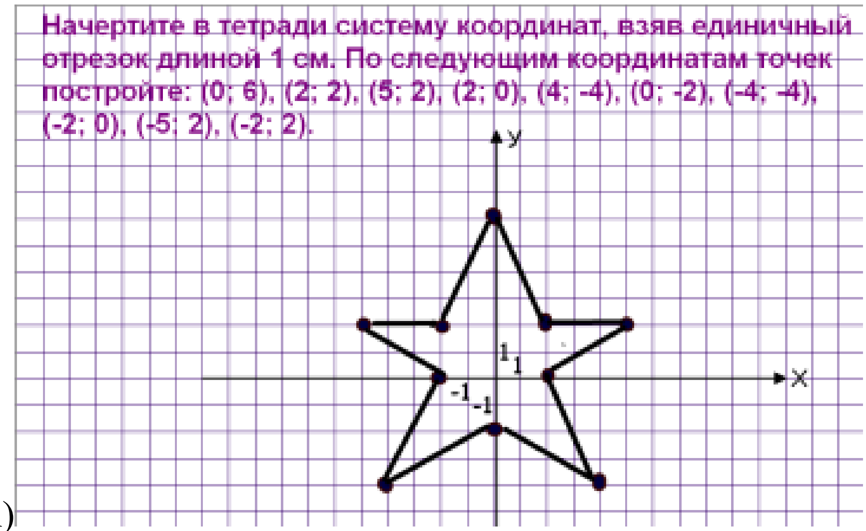
1:2 000 000

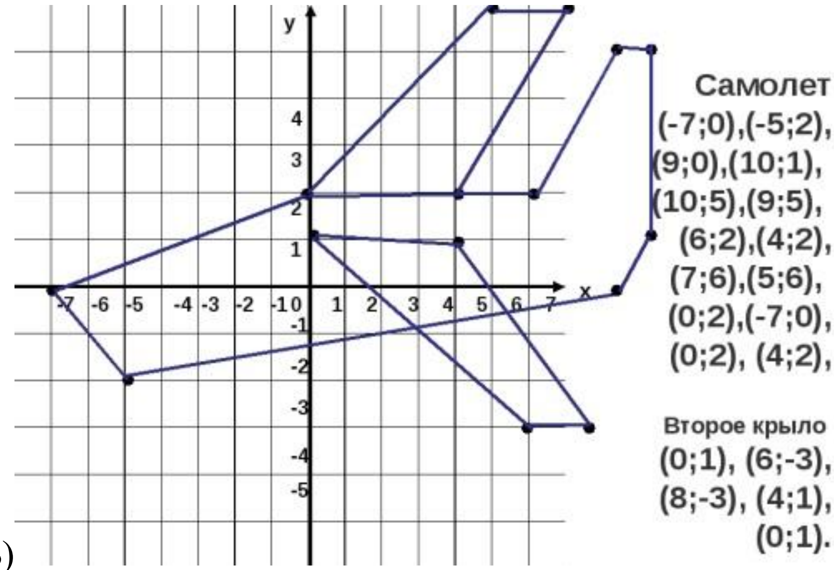
На карте	На местности
1 см	2000000 см=20 км
Х см	1500 км

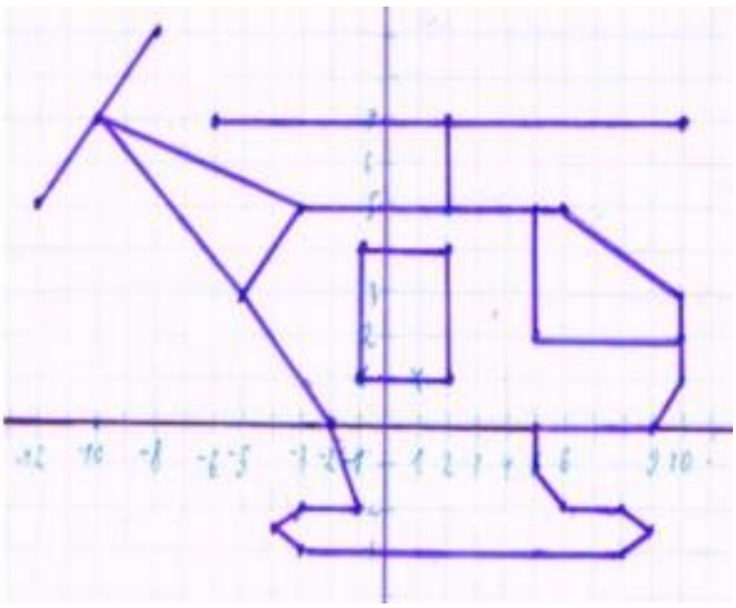
Х =1500:20=75 см

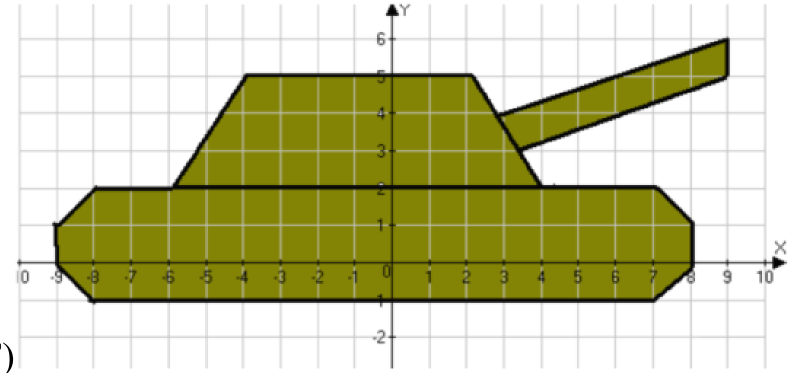
Ответы к задачам игры по теме «Военно-тактическая игра в координатах»:

1.

А) 

Б) 

В) 

Г) 

Решения и ответы к текстовым задачам.

У Германии было 5тысяч самолетов, а у России 15 тысяч. Германия уничтожила у России 20%самолетов, а Россия у Германии 60%. сколько у каждой страны осталось самолетов?

5000:100=50 — это 1%

50*60=3000 это 20% уничтожено.

5000-3000=2000 осталось у Германии.

15000:100=150; 150*20=3000;15000-3000=12000

Ответ: у Германии стало 2000, у России 12000.

2) Было 100 танков. Экипаж танка из 6 человек. Каждый 5 был доставлен в больницу с ранением, 1/5 часть раненых-дети. Сколько раненых детей было доставлено в больницу?

Решение:

100*6=600 всего людей

600:5=120 это всего раненых.

120:5=24 ребенка.

Ответ: в больницу доставлено 24 детей.

3) Война длилась 547 дней, но известно, что за всю войну 136дня и 35 минут военных действий не велось. Сколько всего велось военных действий в минутах?

Решение:

547-136=410 дней 23 часа 25 минут велись военные действия.

410*24=9840 часов

9840*60=590400 минут

23*60=1380

1380+590400=591780 минут

591780+25=591805 минут.

Ответ: 591805 минут велись военные действия.

4) 140 грамм хлеба можно было получить по 1 карточке на ребенка, а на взрослого приходилось 160г. Сколько за 50 дней семья из 2 детей и 3 взрослых получат хлеба?

Решение:

140*2=280г на двух детей

280*50=14000 на 50 дней на 2 детей

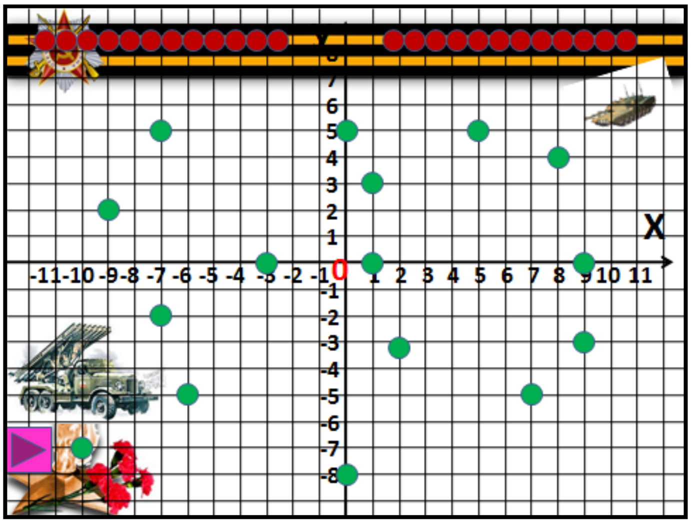
160*3=480г на 3 взрослых

480*50=24000 на 50 дней

14000+24000=38000 г

38000г= 38 кг

<u>Ответ:</u> семья из 3 взрослых и 2 детей на 50 дней получат 38 кг хлеба.



Координаты зеленых точек:

(1;0), (1;3), (5;5), (8;4), (9;0), (9;-2), (7;-5), (2;-3), (0;-8), (-3;0), (-6;-5), (-10;-7), (-7;-2),(-9;2), (-7;5),(0;5).

Координаты красных точек:

(-11,5;8), (-10,5;8), (-9,5;8), (-9;8); (-8,5;8), (-7,5;8), (-6,5;8), (-5,5;8), (-5;8), (-4,5;8), (-3,5;8), (-2,5;8), (1,5;8), (2.5;8); (3,5;8), (4,5;8), (5,5;8), (6,5;8), (7,5;8), (8,5;8), (9,5;8), (10,5;8).

Пока мы обстреливали цели, боеприпасы у нас кончились. Но вот, посыльный доставил пакет с донесением: «Груз сбросят ночью в квадрат АВСД:

А (-3; -4), В (-3;1), С (2;1), Д (;), координаты точки «Д» размыты. Надо определить координаты точки Д, построить квадрат, найти его площадь и периметр.

<u>Ответ:</u> Д (2; -4)   S = 5 • 5 =25;   P = 5 • 4 =20.

б) Груз доставлен.

В первом ящике снарядов было в 2 раза больше, чем во втором. Если во второй ящик добавить 8 снарядов, а из первого взять 40, то количество снарядов будет одинаково. Сколько снарядов было в каждом ящике первоначально?

Ответ: 48 снарядов во втором ящике,

96 – в первом.

Задача для шифровальщиков. Определите координаты огневой точки врага.

1) Мы находимся в начале координат;

2) Идём по оси X вправо на 3 единичных отрезка;

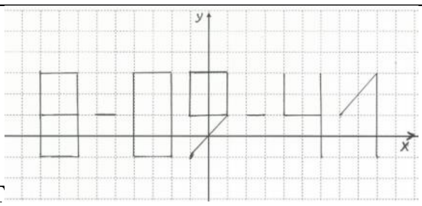
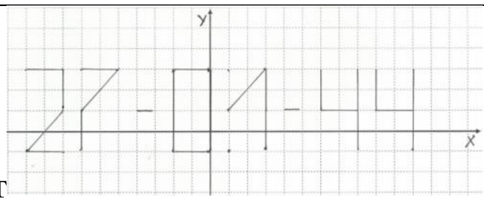
3) Затем вверх на 4 единичных отрезка;

4) Далее влево на 5 единичных отрезков;

5) Далее вниз на 2 единичных отрезка.

Назовите координаты полученной огневой точки.

Ответ: Координаты огневой точки (-2; 2).

1 часть	2 часть
Ответ 	Ответ 

Что это за даты? Правильно — это дата блокады Ленинграда. Блокада Ленинграда длилась ровно 871 день. Это самая продолжительная и страшная осада города за всю историю человечества. Почти 900 дней боли и страдания, мужества и самоотверженности. В 2020 году было 75 лет снятию блокады Ленинграда, 27 января считается днем МУЖЕСТВА.

Но не только город Ленинград пострадал в этой страшной войне. Бои продолжались по всей России. Сейчас приготовьте атласы по географии, вам предстоит выполнить следующее задание. Отметьте в атласах данные координаты и назовите города, соответствующие этим точкам. Что объединяет эти города?

На карточках дана координатная плоскость, где расставлены точки. Надо выписать буквы по координатам.

1 часть, ответ: девятое мая. Ребята скоро 9мая! 9 мая вся наша страна и весь мир отметит праздник ДЕНЬ ПОБЕДЫ. День Победы светлый весенний праздник, праздник боевой славы советского народа – героя, народа – богатыря. День ПАМЯТИ И СКОРБИ.

2 часть, ответ: георгиевская ленточка. С 2005 года в конец апреля стартует акция «Георгиевская ленточка». Акция «Георгиевская ленточка» — неотъемлемая часть праздника Победы. Особенно трепетно к Акции относятся ветераны, для них черно-оранжевые ленты — это символ уважения, благодарности, памяти о их подвиге. Лозунг акции: «Я помню! Я горжусь!» Целью акции «Георгиевская ленточка» стало стремление, во что бы то ни стало, не дать забыть новым поколениям, кто и какой ценой выиграл самую страшную войну прошлого века, чьими наследниками мы остаемся, чем и кем должны гордиться, о ком помнить.

РАЗДЕЛ 3.
7 класс
«Использование математических моделей в решении военно-прикладных задач»

Введение.

В программе спецкурса для 7 класса используются темы курса алгебры и геометрии, практическое применение которых позволяет кадетам решать задачи военно-прикладного характера: функция $y = kx + m$; графики и диаграммы; математическое моделирование. Темы для спецкурса выбраны не случайно. Точность оружия, быстрота управления им, качество принимаемых решений – важнейшие условия успеха в современной войне. В основе успеха лежит математическое моделирование практических задач и логико-математические методы оценки обстановки.

Программа ориентирована на формирование умений использовать полученные знания для решения военно-прикладных задач.

Прикладная направленность курса и его межпредметные связи обеспечиваются систематическим обращением к примерам, раскрывающим возможности применения математики к изучению действительности и решению практических задач военной составляющей.

Цели данного курса: углубление и расширение знаний учащихся по изучаемым темам; на примерах решения военно-прикладных задач показать значимость математики в военном деле; ориентировать обучающихся к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики 7 класса; помочь овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности; развивать умение переводить различные задачи на язык математики; научить составлять и исследовать математические модели для описания и решения задач военной направленности.

Тематическое планирование

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	Кол-во часов	Характеристика видов деятельности кадет
1. Решение военно-прикладных задач с помощью графиков линейных функций	1ч	Решение задач на механическое движение и его графическое описание. Построение графиков по условию задачи, чтение графиков для расчета времени и скорости движения единиц военной техники.
2. Решение военно-прикладных задач с помощью математических моделей	1ч	Составляют модели, выполняют оценку и решают задачи. Описывают явления и события с использованием графика; работают по составленному плану.
3. Решение военно-прикладных задач с помощью геометрических моделей	1ч	Решение элементарных задач на определение прямоугольных и географических координат. На картах определяют движение по азимутам.
4. Решение военно-прикладных задач различными способами	1ч	Знакомятся с техникой линейного перемещения, описывают свойства. Переходят от одних единиц измерения к другим; пошагово контролируют правильность и полноту выполнения алгоритма. Составляют модели, выполняют оценку и решают задачи.
5. Итоговое занятие	1ч	**Практическая работа.** Действуют по самостоятельно выбранному алгоритму решения задач.
ИТОГО		5 часов

Занятие 1.

Решение военно-прикладных задач с помощью графиков линейных функций.

Функция – это зависимость величины «у» от величины «х», где «х» является переменной или аргументом функции, а «у» – зависимой переменной или значением функции.

Задать функцию значит определить правило, в соответствии с которым по значениям независимой переменной можно найти соответствующие ее значения.

Линейная функция – это функция, которую можно задать формулой $y = kx + m$, где x — независимая переменная, k и m — некоторые числа.

Графиком линейной функции $y = kx + m$ является прямая.

Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими собой линейные функции.

А именно, при постоянной скорости равномерного движения, зависимость пути от времени можно представить в виде y=kx, где x – время движения, y – пройденный путь. Это и есть линейная функция при условии m = 0. Более сложные ситуации, в которых время можно рассматривать как независимую величину, а пройденный путь как зависимую величину можно составить математические модели вида y=kx+m , где x – время движения, y – пройденный путь.

Вывод: По условию задачи на равномерное движение можно составить математическую модель линейной функции и использовать знания и умения по теме «Линейная функция и ее график» к решению исходной задачи.

Рассмотрим реальные ситуации решения военно-прикладных задач.

Задача №1. Скорость распространения звука в воздухе в зависимости от температуры подчиняется закону, который может быть выражен формулой линейной функции v = 0,6t + 331, где v - скорость (в м/с), t - температура (в С^o). Найдите, с какой скоростью распространяется звук от сигнальной ракеты:

а) в зимний день с температурой -35^o?

б) в летний день с температурой 35^o?

в) какова должна быть температура воздуха, чтобы скорость распространения звука была равна нулю? Возможна ли такая ситуация в реальности.

Решение

а) Если t = -35, то v = 0,6·(-35) + 331= 310 м/с;

б) Если t = 35, то v = 0,6·35 + 331= 352 м/с.

в) Если v = 0, то 0,6t + 331=0, t = (- $551\frac{2}{3}$) ^{o}. Такая ситуация в реальности невозможна, т.к. в природе не зафиксированы такие показания температуры. **Ответ:** 310 м/с; 352 м/с; (- $551\frac{2}{3}$).

Задача №2. На рисунке 1 изображен график движения разведчика из пункта B в пункт E. Используя этот график, ответьте на вопросы:

а) Какой путь проделал разведчик из пункта B а пункт E?

б) На каком расстоянии от пункта B состоялся привал?

в) Сколько времени длился привал?

г) Через какое время после привала разведчик прибыл в пункт E?

д) Какова средняя скорость движения разведчика на отрезке ВС? На отрезке DE? На отрезке CD?

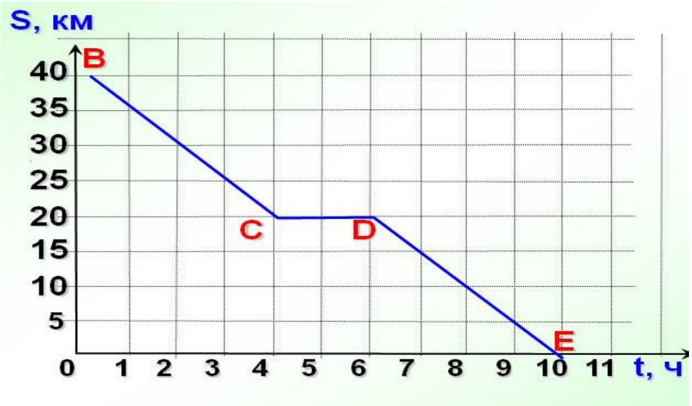


Рисунок 1

Решение:

Время отмечено по оси ОХ (в часах), пройденный путь по оси ОУ (в километрах).

а) Из точки В (0; 40) переместился в точку Е (10;0). Расстояние находим как разность вторых координат, т.к. на оси ОУ отмечен пройденный путь.

S=40–0=40 км.

Ответ: 40 км.

б) Привал соответствует отрезку графика CD, т.к. за время с 4ч до 6ч. расстояние от пункта В не изменялось. Это расстояние соответствует 20 км.

Ответ: 20 км.

в) Привал соответствует отрезку графика CD, время с 4ч до 6ч.

t = 6 – 4 = 2.

Ответ: 2ч.

г) рассмотрим перемещение разведчика на отрезке DE, которое соответствует изменению времени с 6ч до 10ч. t = 10 – 6 = 4. Ответ: 4ч.

д) средняя скорость движения разведчика на отрезке ВС будет находиться как отношение пройденного пути к затраченному времени: $v = \frac{20\text{ км}}{4\text{ч}} = 5\text{ км/ч}$; на отрезке DE$v = \frac{20\text{ км}}{4\text{ч}} = 5\text{ км/ч}$; на отрезке CD$v = \frac{0\text{ км}}{4\text{ч}} = \text{о км/ч}$.

Ответ: $5\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $5\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $0\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Задача №3. От посёлка выдвинулась группа войск №1 на станцию (к месту проведения учений), со скоростью 60км/ч. Через час, вслед за ними со скоростью 90км/ч выступила группа войск №2, поэтому группа № 2 на весь путь затратила на 1ч меньше. Найдите расстояние от посёлка до станции. Задайте формулой линию движения каждой группы.

Решение:

1. Зададим координатную плоскость sOt с осью абсцисс Ot, на которой отметим интервалы времени движения, и осью ординат Os, на которой отметим расстояние от посёлка до велосипедиста (Рис. 2).

2. Нанесём деления в масштабе: по оси ординат – в двух клетках 30км; по оси абсцисс – один час в 2 клетках (в 1 клетке – 30 мин).

3. Построим линию движения Группы №1: начало движения отметим точкой (0;0). Группа двигается со скоростью 60км/ч, значит, прямая должна пройти через точку (1;60).

4. Построим линию движения Группы №2: конец линии отметим точкой (1;0), т.к. группа затратил на весь путь на 1час меньше. Скоростью 90км/ч, значит, следующая точка прямой имеет координату (2;90).

5. Отметим А (3; 180) - точку пересечения прямых1 и 2: её ордината покажет расстояние от посёлка до станции: s = 180 |=> 180км – расстояние от посёлка до станции.

6. Пройденный путь найдем по правилу: s = vt.

Для группы №1: $v = 60\frac{км}{ч}$, t – независимая переменная, s = 60t.

Для группы №2: $v = 90\frac{км}{ч}$, t – независимая переменная, по условию задачи известно, что на весь путь группа затратила на 1ч меньше, тогда s = 90(t – 1) |=> s = 90t – 90.

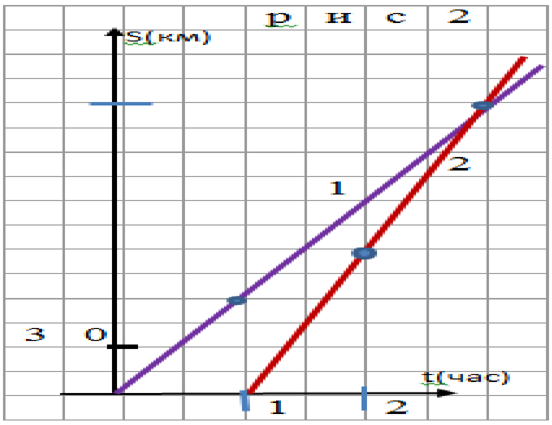


Рисунок 2

Ответ: 180км; s = 60t; s = 90t – 90.

Задача №4. В штабе войск 25 января было принято решение о проведении общевойсковых учений между двумя группами войск в малопроходимой местности. Место совещания для уточнения и распределения боевых задач было решено провести между пунктами M и N (места дислокации войск), расстояние между которыми равно 162км. От пункта M отправилась группа командиров I со скоростью 45км/ч. Через 45 мин от пункта N навстречу ей отправилась группа командиров II со скоростью 36км/ч. Через сколько часов после отправления первой группы они встретятся?

Решение:

1. Зададим координатную плоскость sOt с осью абсцисс Ot, на которой отметим интервалы времени движения, и ось ординат Os, на которой отметим расстояние от пункта М до пункта N, равное 162км. Началом отсчёта является пристань М (Рис. 3).

2. Нанесём деления в масштабе: по оси ординат – в двух клетках 18км; по оси абсцисс – один час в 12 клетках (в 1 клетке–5мин.), т.к. в условии задачи указано время в минутах. Отметим точку N (0; 162).

3. Построим линию движения первой группы I: начало его движения будет в точке с координатами (0;0). Скорость движения 45км/ч, значит, прямая должна пройти через точку с координатами (1;45).

4. Построим линию движения второй группы II: начало движения будет в точке с координатами ($\frac{3}{4}$; 162), так как группа выдвинулась из пункта N, удалённого от М на 162км, на 45мин. позже первого, а 45мин. = $\frac{3}{4}$ ч. Скорость 36км/ч, значит, прямая должна пройти через точку ($1\frac{3}{4}$; 126), так как группа двигалась в направлении пункта М: 162 – 36 = 126(км).

5. Точкой пересечения прямых I и II является точка А ($2\frac{1}{3}$;105). Абсцисса точки показывает время, через которое они встретились после отправления первой группы: t = $2\frac{1}{3}$, |=> $2\frac{1}{3}$ ч = 2ч 20мин.

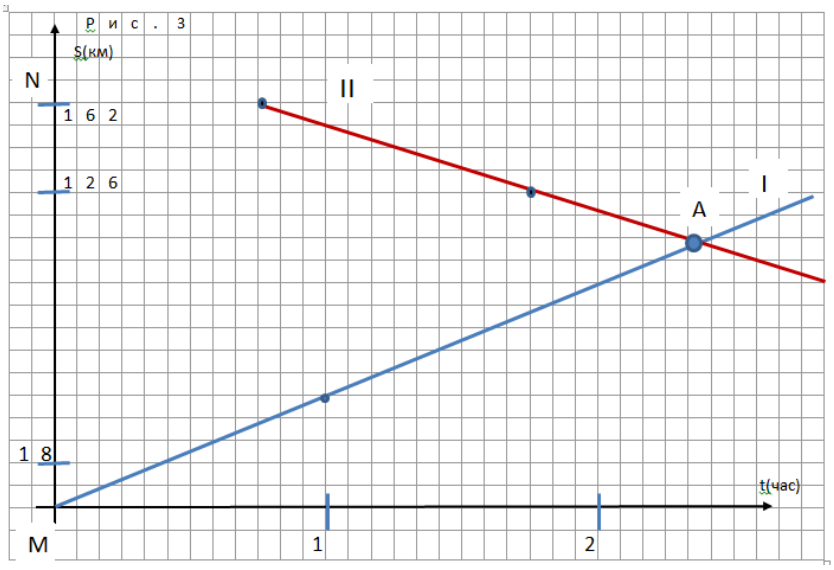


Рисунок 3

Ответ: 2ч 20мин.

Самолет МиГ-31 единственный в истории советских и российских ВВС истребитель, официально именуемый «воздушным кораблём». За всю историю авиации одним из самых совершенных перехватчиков является этот **самолёт**, способный вести боевые действия на высоких скоростях, может развивать **скорость** в 4817 километров в час. Самолет Су-27, который находится на вооружении **российской** армии более 30 лет. Он способен летать со **скоростью** до 4017 километров в час.

МиГ-3

Су-27

Задача №5. Расстояние между аэродромами, на которых находились самолеты 30 км. Машины движутся по прямой траектории в противоположные стороны со скоростями 4800 км/ч и 4000 км/ч. Найдите расстояние между машинами через t ч. Запишите формулу зависимости расстояния между машинами от времени.

Решение:

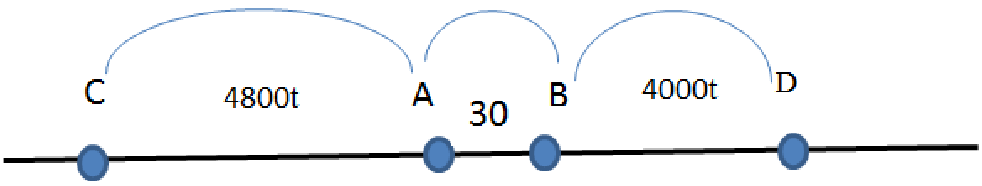


Рисунок 4

Пусть сначала машины находились в точках A и B (рис 4), расстояние между которыми AB = 30 км. Через t ч одна машина окажется в точке C, пройдя расстояние AC = 4800t км. Другая машина попадет в точку D, преодолев расстояние BD = 4000t км. Через t ч расстояние между машинами $s = CD = AC + AB + BD = 4800t + 30 + 4000t = 8800t + 30$ км. Зависимость расстояния между машинами от времени имеет вид $s = 8800t + 30$ (где $t \geq 0$), т. е. является линейной функцией ($k = 8800$, $m = 30$).

Ответ: s = 8800t + 30

Задачи для самостоятельного решения

1. На рисунке 5 изображён график движения военного автомобиля при выполнении учений. Запишите, какую информацию вы можете считать с графика.

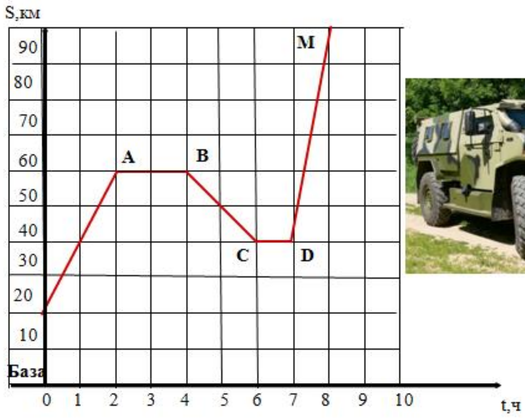


Рисунок 5

2. Колонна солдат совершает марш-бросок по закону x=5+2t, где x – пройденный путь (м/с), а t – затраченное время (с) Рисунок 6.

Ответьте на вопросы:

а) какой путь проделает колонна за 5с движения?

б) сколько времени потребовалось для преодоления 25м?

в) вычислите скорость движения колонны;

г) вычислите, сколько потребуется времени для прохождения 1 км.

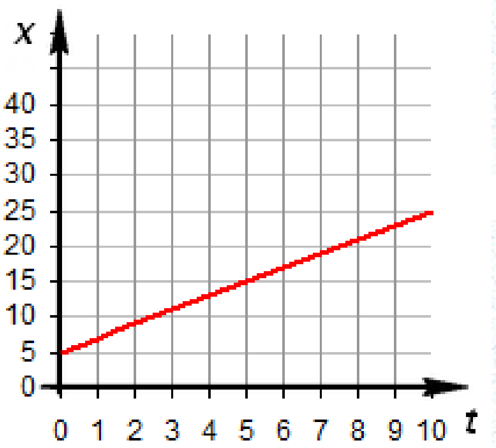


Рисунок 6

Ответ: а) 15м; б)10с; в)2м/с; г) 500с.

3. На рисунке 7 представлены графики изменения скорости трех пехотинцев в течении некоторого времени. Скорость какого пехотинца

увеличивается в зависимости от времени движения, какого уменьшается, а какого остается постоянной? Чему равен пройденный путь каждого через 2 с после начала движения?

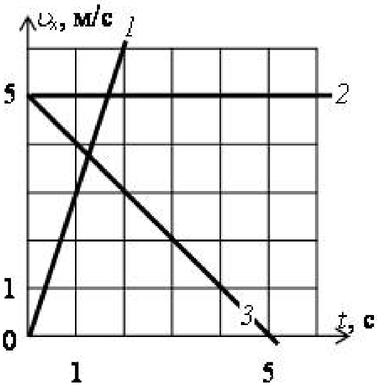


Рисунок 7

Ответ: $s_1 = 12$м; $s_2 = 10$м; $s_3 = 6$м.

4. Для патрулирования территории два полицейских-кавалериста начали двигаться из одной точки в одном направлении. На рисунке 8 приведены графики зависимостей путей, пройденных кавалеристами, от времени. Определите расстояние между полицейскими через промежуток времени 1ч 15мин. После начала движения.

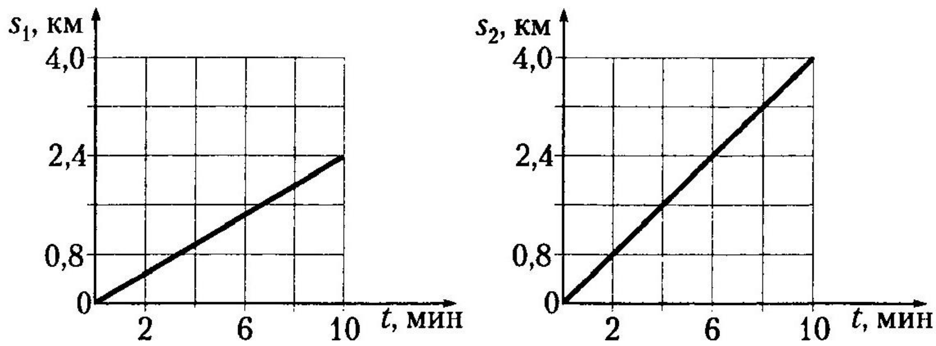


Рисунок 8

Ответ: $v_1 = 14{,}4$км/ч; $v_2 = 24$км/ч; $s = 12$км.

5. В штабе войск 31.10 было принято решение о проведении общевойсковых учений между двумя группами войск. Находясь на расстоянии 2 км к северу от штаба, группа войск армии «Север» на боевые позиции двинулась колонной со скоростью 6 км/ч. Группа армий «Юг» выполнила марш –бросок со скоростью 10 км/ч, так как она дислоцировалась южнее штаба на 4 км.

а) Составьте уравнения движений групп войск «Север» и «Юг».

б) Постройте графики движения данных групп, считая, что место расположения штаба войск в начале системы координат.

в) Через сколько часов от начала движения группы войск «Север» и «Юг» встретятся?

г) В какой точке на карте предполагалось проведение общевойсковых учений?

Занятие 2.

Решение военно-прикладных задач с помощью математических моделей.

Рассмотрим задачи, в которых речь идет о прямолинейном движении.

Определение скорости при равномерном движении можно выполнить по формуле $v = \frac{s}{t}$.

Из этой формулы можно получить еще две формулы для нахождения пути и времени при равномерном движении:

$s = v \cdot t$ и $t = \frac{s}{v}$.

Задача №1. В гарнизон из штаба выехал автомобиль. Первые 1,5 часа автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующий час — со скоростью 90 км/ч, а последние 30 мин — со скоростью 60 км/ч. С какой постоянной скоростью мог ехать автомобиль все это время?

Решение.

Постоянная скорость – это средняя скорость, т.е. отношение пройденного пути ко времени, за который пройден этот путь. За первые 1,5 часа автомобиль проехал 1,5 · 70 = 105 км, за следующий час —90 км и за последние 30 мин=0,5 часа — 0,5 · 60 = 30 км. Весь путь составил 105+90+30 = 225 км, а суммарное время движения — 1,5 + 1 + 0,5 = 3 часа, откуда средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути 225:3 = 75 км/ч.

Ответ: 75.

Перемещение двух объектов по окружности в одном направлении можно уподобить движению по прямой в одном направлении.

Перемещение двух объектов по окружности в разных направлениях можно уподобить движению навстречу друг другу по прямой.

Задача №2. Два кадета одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй кадет прошёл первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого кадета, если известно, что она на 6 км/ч меньше скорости второго.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первого кадета, тогда x+6 км/ч — скорость второго кадета. Из условия известно, что второй бегун пробежал круг за $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ часа, при этом через час после старта первому бегуну оставался 1 км до окончания первого круга, составим уравнение:

$$\frac{3}{4}(x+6)-1\cdot x=1$$

$$-\frac{1}{4}x=-\frac{7}{2}$$

$$x=14.$$

Таким образом, скорость первого кадета равна 14 км/ч.

Ответ: 14.

Задача №3. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 44 км/ч, проезжает мимо разведчика, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 81 секунду. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.

Скорость сближения разведчика и поезда равна 44 − 4 = 40 км/ч. Заметим, что 1 м/с равен 3,6 км/ч. Значит, длина поезда в метрах равна $\frac{40\cdot 81\cdot 1}{3{,}6}=900(\text{м})$

Ответ: 900 м.

Задача №4. Для выполнения боевой задачи из города А в город В со скоростью 55 км/ч выехала первая разведгруппа, а через час после этого навстречу ему из города В выехала со скоростью 90 км/ч вторая разведгруппа. Расстояние между городами А и В равно 490 км. На каком расстоянии от города А группы встретятся?

Решение.

Пусть x км — искомое расстояние.

Составим таблицу по данным задачи:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый автомобиль	55	$\frac{x}{55}$	x
Второй автомобиль	90	$\frac{490-x}{90}$	490-x

Так как второй автомобиль вышел на 1 ч позже первого, составим уравнение: $\frac{x}{55} - \frac{490-x}{90} = 1$

$$18x-5390+11x=990$$
$$29x=6380$$
$$x=220.$$

Ответ: 220 км.

Рассмотрим задачи, в которых речь идёт о движении объекта по реке. Скорость любого объекта в стоячей воде называют **собственной скоростью** этого объекта.

Чтобы узнать скорость объекта, который движется против течения реки, надо из собственной скорости объекта вычесть скорость течения реки (течение «мешает» движению):

$$v_{\text{пр.теч}} = v_{собств} - v_{\text{теч}}$$

Чтобы узнать скорость объекта, который движется по течению реки, надо к собственной скорости объекта прибавить скорость течения реки (течение «помогает» движению):

$$v_{\text{по теч}} = v_{собств} + v_{\text{теч}}$$

При движении по озеру (или в неподвижной воде) скорость объекта равна собственной скорости (течение отсутствует, т. е. скорость течения равна 0).

При движении плота по течению реки его скорость совпадает со скоростью течения реки (собственная скорость у плота отсутствует, т. е. равна 0):

$$v_{\text{плота}} = v_{\text{теч}}$$

Задача №5. Для выполнения боевого задания разведчик отправился к лагерю противника по реке. Он плывет со скоростью 5 км/ч, скорость течения равна 1 км/ч. Разведчику потребовался 1 час, чтобы доплыть к месту и вернуться обратно. Найдите расстояние до лагеря противника.

Решение.

Пусть расстояние x км и скорость по течению будет равна 5+1=6 км/ч. Скорость против течения тогда 5−1=4 км /ч. Составим уравнение $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = 1$

Домножим обе части уравнения на 12:

2x+3x=12

Решим полученное уравнение:

x=125=2,4 (км.)

Ответ: 2,4 км.

Задача №6. На военных учениях группа солдат проплыла на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, в течение двух часов проводились разведывательные операции, затем вернулась обратно через 5 часов от начала движения. На какое расстояние от пристани отплыла группа, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Решение.

Пусть S км — расстояние, на которое отплыла группа солдат. Зная, что скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость лодки — 6 км/ч, найдём, что время, за которое она проплыл туда и обратно, составляет $\frac{s}{6-2} + \frac{s}{6+2}$ ч.

Учитывая, что разведка проходила 2 часа и группа вернулась через 5 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{s}{4} + \frac{s}{8} + 2 = 5$$

Отсюда S = 8 км.

Ответ: 8 км.

Задача №7 (повышенной сложности). Расстояние между штабом и гарнизоном 120 км. Из штаба в гарнизон выехал автомобиль, а через 90 минут следом за ним со скоростью 100 км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобиль и повернул обратно. Когда он проехал половину пути от места встречи до штаба, автомобиль прибыл в гарнизон. Найдите расстояние от штаба до места встречи.

Решение.

Обозначим S км — расстояние от штаба до места встречи, v км/ч – скорость автомобиля, t ч – время движения мотоциклиста от штаба до места встречи.

Составим таблицу по данным задачи:

(от штаба до места встречи)	**Скорость, км/ч**	**Время, ч**	**Расстояние, км**
Автомобиль	v	t	vt
Мотоциклист	100	t	100t

Тогда, так как мотоциклист вышел на $\frac{3}{2}$ ч позже, то $\left(t+\frac{3}{2}\right)v = 100t$.

А так как ко времени приезда автомобиля в гарнизон мотоциклист прошел половину пути от места встречи до штаба, то $\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)v = 120$

Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} \left(t+\dfrac{3}{2}\right)v = 100t, \\ \left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{2}\right)v = 120 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(t+\frac{3}{2}\right)v}{\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)v} = \dfrac{100t}{120} \\ \left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{2}\right)v = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2t+3}{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}} = \dfrac{5t}{3}, \\ \left(\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{2}\right)v = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1, \\ v=40. \end{cases}$$

Тогда $S = 100t = 100$ км.

Ответ: 100 км.

Задачи на смеси и сплавы

В процессе решения каждой такой задачи целесообразно действовать по следующей схеме:

1. Изучение условия задачи. Выбор неизвестных величин (их обозначаем буквами x, y и т.д.), относительно которых составляем пропорции. Выбирая неизвестные параметры, мы создаем математическую модель ситуации, описанной в условии задачи.

2. Поиск плана решения. Используя условия задачи, определяем все взаимосвязи между данными величинами.

3. Осуществление плана, т.е. оформление найденного решения – переход от словесной формулировки к составлению математической модели.

4. Изучение полученного решения, критический анализ результата.

При решении задач на смеси часто путают проценты и доли, раствор и растворенное вещество. Необходимо помнить, что массовая доля wнаходится делением значения процентной концентрации на 100%, а масса растворенного вещества m(в-ва) равна произведению массы раствора m(р-ра) на массовую долю:

$$m(\text{в-ва}) = m(\text{р-ра}) \cdot w.$$

В большинстве случаев задачи на смеси и сплавы становятся нагляднее, если при их решении использовать схемы, иллюстративные рисунки или вспомогательные таблицы.

Например, в каких пропорциях нужно смешать a%-й и b%-й растворы кислоты, чтобы получить c%-й раствор?

Возьмем x г a%-го раствора и y г b%-го раствора кислоты. Составим таблицу:

Концентрация раствора (сплава), %	**Масса раствора (общая), г**	**Масса кислоты (вещества), г**
a	x	$0{,}01ax$
b	y	$0{,}01by$
c (смесь)	$x + y$	$0{,}01c(x + y)$

Составим и решим уравнение:

$0{,}01ax + 0{,}01by = 0{,}01c(x + y)$,

$(b - c)y = (c - a)x$,

$x : y = (b - c) : (c - a)$.

Задача №8. Имеется два куска сплава меди и цинка для изготовления контактов для раций с процентным содержанием меди 30% и 80% соответственно. В каком отношении надо взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 60% меди?

Решение:

Концентрация сплав), %	**Масса сплава (общая), г**	**Масса сплава, г**
30	x	$0{,}01 \cdot 30x$
80	y	$0{,}01 \cdot 80y$
60 (сплав)	$x + y$	$0{,}01 \cdot 60(x + y)$

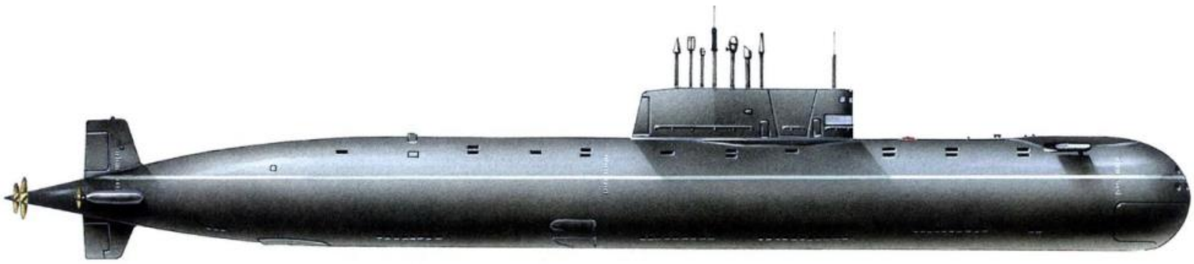
Составим уравнение

$$0,3x+0,8y=0,6(x+y)$$
$$0,3x=0,2y$$
$$x:y=2:3.$$

Ответ: 2:3

Медь – первый металл, использованный человеком. Из него делали наконечники копий. Позже его стали называть пушечным металлом: сплав из 90% меди и 10% олова использовали для отливки орудийных стволов. И сейчас главный потребитель меди – военная промышленность: детали самолётов и судов, латунные гильзы, пояски для снарядов, электротехнические детали – всё это и многое другое делают из меди.

Хром применяется для получения специальных сталей, изготовления орудийных стволов, броневых плит. Стали, содержащие более 10% хрома, почти не ржавеют, из них делают корпуса подводных лодок.



Задача №9. Первый сплав содержит 15% хрома, второй — 20% хрома. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 18% хрома. Найдите массу третьего сплава.

Решение.

Концентрация сплав), %	**Масса сплава (общая), г**	**Масса сплава, г**
15	*x*	0,01·*15x*
20	*x+4*	0,01·20(x+4)
18(сплав)	*x + x+4*	0,01·*18(x + x+4)*

Составим и решим уравнение:

$$0,15x+0,2(x+4)=0,18(2x+4)$$
$$-0,01x=-0,08$$
$$x=8.$$

Значит, масса первого сплава равна 8 кг, тогда масса второго сплава равна 12 кг и масса третьего сплава равна 20 кг.

Ответ: 20 кг

Задачи для самостоятельного решения

1. Первые 2 часа автомобиль БМП ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 3 часа — со скоростью 50 км/ч, а последний час — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля БМП на протяжении всего пути.

Ответ: 52,5.

2. Два кадета одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй кадет прошёл первый круг 30 минут назад. Найдите скорость первого кадета, если известно, что она на 12 км/ч меньше скорости второго.

Ответ: 15

3. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 86 км/ч, проезжает мимо разведчика, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 6 км/ч, за 18 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: 400 м.

4. Во время марш-броска солдаты проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, выполнив боевые действия за 2 часа, вернулись обратно через 6 часов от начала движения. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Ответ: 9 км.

5. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Ответ: 6 кг.

6. Расстояние между гарнизонами равно 750 км. Из одного гарнизона в другой со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из второго гарнизона выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от первого гарнизона автомобили встретятся?

Ответ: 400 км.

Занятие 3.

Решение военно-прикладных задач с помощью геометрических моделей.

Случай, произошедший на одном из фронтов Великой Отечественной войны. Подразделению лейтенанта Иванюка было приказано построить мост через горную реку. На противоположном берегу засели фашисты. Для разведки места постройки моста лейтенант выделил разведывательную группу во главе со старшим сержантом Поповым. В ближайшем лесном массиве они измерили диаметр и высоту наиболее типичных деревьев и подсчитали количество деревьев, которые можно было использовать для постройки.

Высоту деревьев определили при помощи вешки.

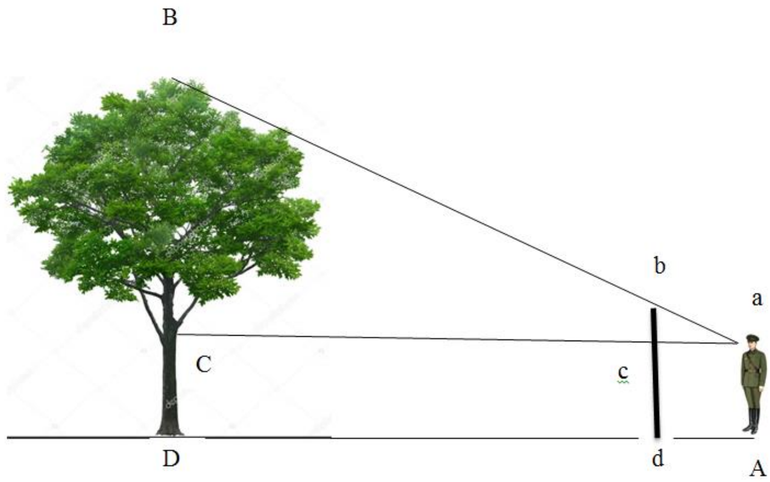


Рисунок 1

Этот способ состоит в следующем (рисунок 1). Запасшись шестом выше своего роста, воткните его в землю отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева. Отойдите от шеста назад, по продолжению Dd до того места A, с которого, глядя на вершину дерева, вы увидите на одной линии с ней верхнюю точку b шеста. Затем, не меняя положение головы, смотрите по направлению горизонтальной прямой Ac, замечая точки c и C, в которых луч зрения встречает шест и ствол. Попросите помощника сделать в этих местах пометки, и наблюдение окончено. Остается на основании отношений вычислить BC из пропорции

$$BC:bc=aC:ac, \text{ откуда } BC=bc\cdot\frac{aC}{ac}.$$

Расстояния bc, aC и ac легко измерить непосре дственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также непосредственно измеряется), чтобы узнать искомую высоту дерева.

Для определения количества деревьев старший сержант приказал солдатам измерить площадь лесного массива. Затем он подсчитал количество деревьев на небольшом участке размером 50·50 кв.м и произвел соответствующее умножение.

На основании всех данных, собранных разведчиками, командир подразделения установил, где и какой мост нужно строить. Мост построили к сроку, боевое задание было выполнено успешно.

Задача №1. Вычислить ширину озера.

Решение.

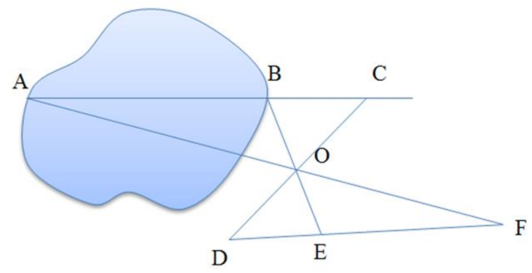


Рисунок 2

Построим OB=OE и OC=OD, тогда ΔBOC=ΔEOD по 1 признаку равенства треугольников (∠BOC=∠EOD-вертикальные, OB=OE и OC=OD по условию) (рисунок 2).

Следовательно, ∠CBO=∠DEO, а значит равны углы ABO и OEF (как смежные равным углам).

ΔAOB=ΔFEO по второму признаку равенства треугольников (OB=OE по условию, ∠BOA=∠EOF-вертикальные, ∠ABO = ∠OEF).

Отсюда делаем вывод, что ширина озера равна длине отрезка EF.

Задача №2. Отделению старшего сержанта Куприянова было приказано измерить ширину реки, через которую предстояло организовать переправу.

Подобравшись к кустарнику вблизи реки, отделение Куприянова залегло, а сам Куприянов вместе с солдатом Карповым выдвинулся ближе к реке, откуда был хорошо виден занятый фашистами берег. В таких условиях измерять ширину реки нужно было на глаз.

- Ну-ка, Карпов, сколько? - спросил Купрянов.- По-моему, не больше 100-110 м, – ответил Карпов.

Куприянов был согласен со своим разведчиком, но для контроля решил измерить ширину реки при помощи «козырька». Способ состоит в следующем. Надо встать лицом к реке и надвинуть фуражку на глаза так, чтобы нижний обрез козырька точно совпал с линией противоположного берега. Козырек можно заменить ладонью реки или записной книжкой, плотно приложенной ребром ко лбу. Затем, не изменяя положения головы, надо повернуться направо или налево, или даже назад (в ту сторону, где поровней площадка, доступная для измерения расстояния) и заметить самую дальнюю точку, видимую из-под козырька (ладони, записной книжки).

Расстояние до этой точки и будет примерно равно ширине реки.

Этим способом и воспользовался Куприянов. Он быстро встал в кустах, приложил ко лбу записную книжку, также быстро повернулся и завизировал дальнюю точку. Затем вместе с Карповым он ползком добрался до этой точки, измеряя расстояние шнуром. Получилось 105 м.

Куприянов доложил командованию полученные им данные.

Дать геометрическое обоснование способу «козырька».

Решение.

Луч зрения, касающийся обреза козырька (ладони, записной книжки), первоначально направлен на линию противоположного берега (рисунок 3). Когда человек поворачивается, то луч зрения, подобно ножке циркуля, как бы описывает окружность, и тогда расстояния равны как радиусы одной окружности.

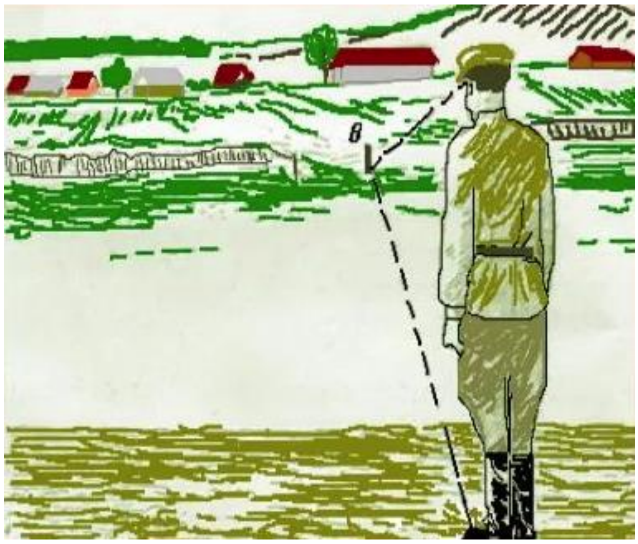
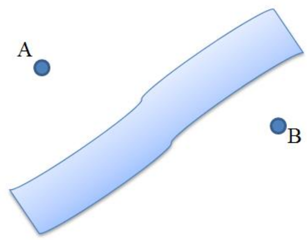


Рисунок 3

Задача №4. Между двумя селами А и В течет река с приблизительно параллельными берегами. В боях мост через реку был уничтожен. Отряду нужно восстановить через реку мост под прямым углом к его берегам так, чтобы путь от А до В был кратчайшим.



Решение.

Проведем через точку А прямую, перпендикулярную к направлению реки, и отложим от А отрезок АС, равный ширине реки, соединим С с В (рисунок 5). В точке D и надо построить мост, чтобы путь из А в В был кратчайшим.

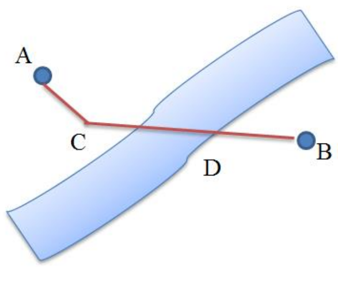


Рисунок 5

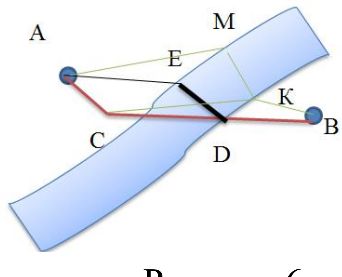


Рисунок 6

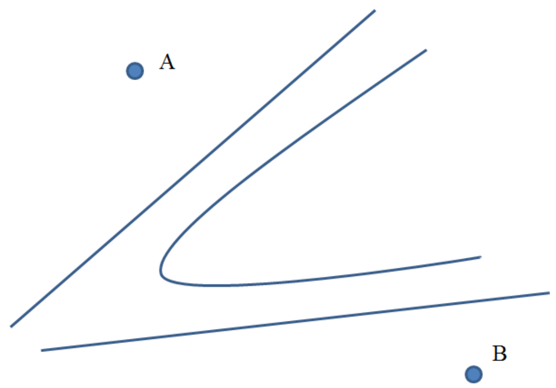
Действительно, построив мост DE и соединив E с A, получим путь AEDB, в котором часть AE параллельна CD (как противоположные стороны параллелограмма). Поэтому путь AEDB по длине равен пути ACB.

Покажем, что этот путь самый короткий.

Допустим, что некоторый путь AMKB короче AEDB, т.е. короче ACB (рисунок 6). Соединив C и K, видим, что CK равно AM. Значит, путь AMKB=ACKB. Но CKB больше CB, значит, ACKB больше ACB, а следовательно, больше и AEDB.

Реши самостоятельно.

Найти кратчайший путь от A до B через реку, которую необходимо пересечь дважды под прямым углом к берегам. В каких местах надо построить мосты?



Занятие 4.

Решение военно-прикладных задач различными способами.

Задача №1. В 14 часов 45 минут подразделение «Синих» вышло из пункта B и движется в направлении пункта A со скоростью 25 км/ч. В 15 часов 15 минут из пункта A выходит подразделение «Красных» и движется со скоростью 20 км/ч навстречу подразделению «Синих» с целью проведения учебного сражения. Определить возможные время и рубеж встречи подразделений сторон, если расстояние между пунктами A и B равно 80.

Решение:

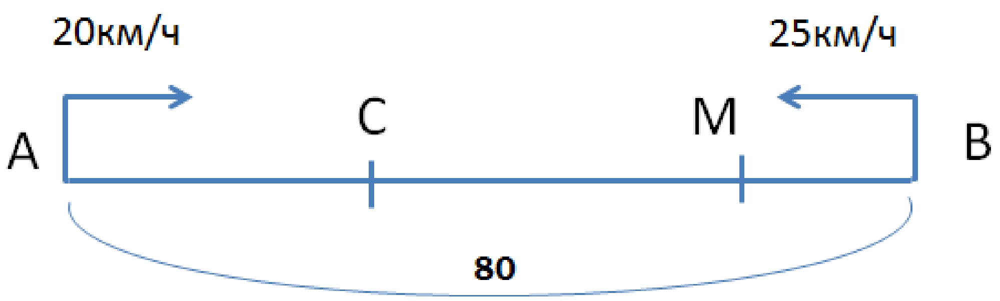


Рисунок 1

Составим схему движения (рисунок 1).

Подразделение «Красных» вышло позже подразделения «Синих» на (15 часов 15 минут - В 14 часов 45 минут) = 30 минут = 0,5 часа.

Это значит, что «Синие» уже к выходу «Красных» находились в точке М и прошли 25·0,5= 12,5км.

До встречи подразделениям нужно преодолеть отрезок пути АМ = 80 – 12,5 = 67,5 км. Пусть встреча произойдет в пункте С. Скорость сближения 20 + 25 = 45 км/ч; время «Красных» до встречи 67,5:45 = 1,5ч, «Синих» – (1,5 + 0,5) = 2ч.

«Красные» преодолеют до встречи отрезок пути АС = 1,5 ·20 = 30 км, «Синие» – ВС = 2 ·25 = 50 км.

Ответ: Рубеж встречи находиться в 30км от пункта А и в 50 км от пункта В. «Красных» в пути были 1,5 часа, «Синие» – 2 часа.

Задача №2. Стрелок стреляет по мишени. Число попаданий в зависимости от количества выстрелов приведено в таблице:

Число выстрелов	Количество попаданий
10	8
20	17
30	25
40	33
50	41
60	49
70	57

а) Определите частоту попадания. Запишите формулу, которая выражает зависимость количества попаданий от числа выстрелов.

б) Представьте эту зависимость графически.

в) Болельщики стрелка заключили пари с его соперниками, что, сделав еще 30 выстрелов, стрелок поразит цель не менее 20 раз. Как вы считаете, стоило ли соглашаться соперникам стрелка на пари? Могут ли болельщики стрелка проиграть пари?

Решение:

а) Пусть n – число выстрелов; р – количество попаданий; Q – частота попадания. Q = $\frac{p}{\mathrm{n}}$

Число выстрелов	Количество попаданий	Частота попадания
10	8	0,8

20	17	0,85
30	25	0,83
40	33	0,825
50	41	0,82
60	49	0,817
70	57	0,814

Усредненная частота попадания = (0,8 + 0,85 + 0,83 + 0,825 + 0,82 + 0,817 + 0,814):7 ≈ 0,82

Тогда, зависимость количества попаданий (p) от числа выстрелов (n) можно представить формулой: p = 0,82n.

б) Зависимость, представленная формулой p = 0,82n является функцией прямая пропорциональность, графиком которой является прямая и n ≥ 0.

1. Зададим координатную плоскость pOn с осью абсцисс On, на которой отметим числа выстрелов, и ось ординат Op, на которой отметим количества попаданий (рисунок 2).

2. Нанесём деления в масштабе: по оси ординат – в двух клетках 10 выстрелов; по оси абсцисс – в 1 клетке – 5попаданий.

3. Построим линию, которая будет показывать зависимость количества попаданий от числа выстрелов.

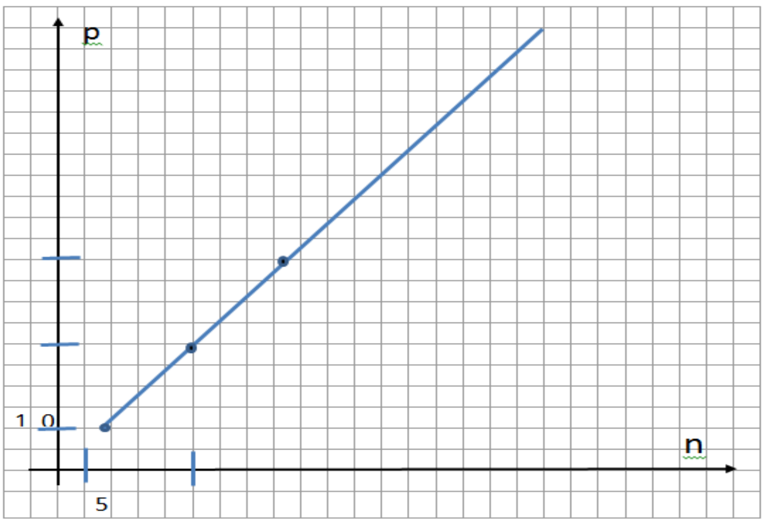


Рисунок 2

в) Болельщики стрелка выиграют пари, если частота попадания не превосходит усредненную частоту попадания.

Вычислим частоту попадания условия пари Q = $\frac{p}{\text{n}}$=$\frac{20}{30} \approx 0,67$, следовательно, болельщики стрелка, скорее всего выиграют пари. Болельщики стрелка все же могут проиграть пари при условии, что стрелок допустит ошибки и поразит цель менее 20 раз. Такая ситуация возможна, но с меньшей долей вероятности.

Задача №3. В подрывной технике употребляют сгорающий с небольшой скоростью бикфордов шнур. Какой длины надо взять шнур, чтобы успеть убежать на расстояние 300м после того, как его зажгут? Скорость бега равна 5м/с, а пламя по шнуру распространяется со скоростью 0,8 см/с.

Решение:

1) Найдем время, за которое подрывник должен покинуть место взрыва t = $\frac{s}{v}$, зная расстояние 300м и скорость бега 5м/с: t = 300м:5м/с = 60с.

2) Найдем длину шнура, зная, что пламя по шнуру распространяется со скоростью 0,8 см/с, а время горение шнура должно быть не меньше времени, за которое подрывник должен покинуть место взрыва – 60с. $s = v$t, тогда

s = 60 · 0,8 = 48см.

Ответ: время, за которое подрывник должен покинуть место 60с; длина бикфордова шнура 48см.

Задача №4. Два бронетранспортера движутся в одном направлении со скоростями $v_1 =$ 54 км/ч и $v_2 =$ 36км/ч. В начале пути расстояние между ними было 18 км. Через какое время, первый бронетранспортер догонит идущий впереди второй бронетранспортер? Решите задачу аналитически и графически.

Решение:

1)Аналитическое решение

Найдем скорость сближения 54 км/ч – 36 км/ч = 18км/ч; найдем время, за которое первый бронетранспортер догонит идущий впереди второй бронетранспортер 18км:18км/ч = 1ч.

Ответ: 1час

2) Графическое решение

1.Зависимость пройденного пути от времени для каждой машины представим как s_1 = 54t и s_2 = 36t, а это функция прямая пропорциональность. Графиком прямой пропорциональности является прямая. Построим графики этих функций в одной системе координат.

2. Зададим координатную плоскость sOt с осью абсцисс Ot, на которой отметим интервалы времени движения, и ось ординат Os (рисунок 3).

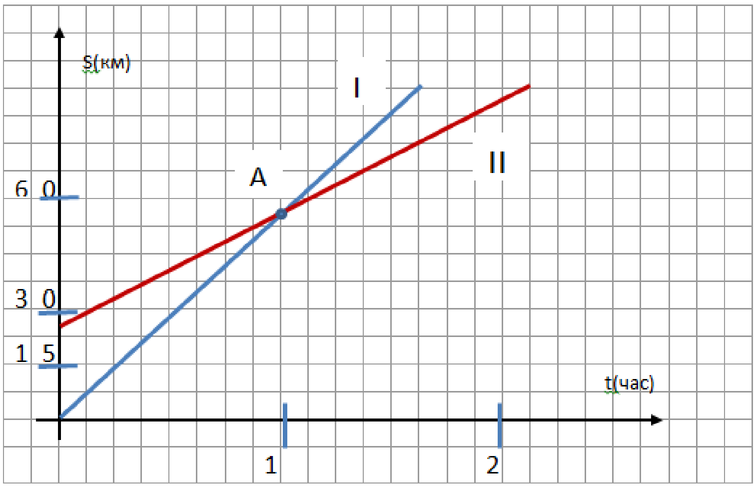


Рисунок 3

Точка пересечения графиков – это точка встречи двух автомобилей. Абсцисса этой точки — это время, за которое первый бронетранспортер догонит идущий впереди второй бронетранспортер.

Ответ: 1час

Задача №4. В 8 часов утра из пункта А в пункт В вышел разведчик, планируя прийти туда в 21 час. В 9 часов утра того же дня из пункта В вышел второй разведчик, планируя прийти в пункт А в 19 часов. Разведчики планировали встретиться и обменяться информацией. В 11 часов первый путник сделал непредвиденную остановку на 2 часа и, увеличив скорость, пришел в пункт В, как и планировал, в 21 час. На сколько раньше встретились бы разведчики, если бы первый шел без остановок?

Способ построения траекторий движения

Всякому реальному движению можно поставить в соответствие график, который мы называем траекторией движения. Каждая точка этого графика определяется двумя значениями: временем движения объекта и расстоянием от некоторого исходного пункта А. Таким образом, рассматривая траекторию, мы можем установить, на каком расстоянии находился объект в определенный момент времени, когда он изменил скорость движения, в каком направлении двигался, когда прибыл в пункт назначения. Различным движущимся объектом соответствуют различные траектории движения. По точкам пересечения траекторий можно определить, когда и на каком расстоянии от пункта А объекты встречались.

Решение:

1. Нарисуем траектории движения разведчиков (рисунок 4)

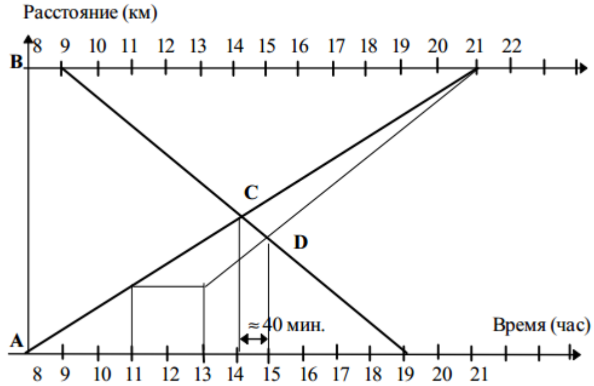


Рисунок 4

На рисунке тонкой линией изображена траектория с учетом двухчасовой остановки. C – планируемая точка встречи, D – действительная точка встречи.

2. Спроецировав точки C и D на ось времени, можно заметить, что встреча произойдет действительно позже и приблизительно на 40 минут.

Найдем точное решение задачи, заметив предварительно, что, не видя траекторий движения, мы не можем определенно сказать, повлияла ли остановка первого путника на время встречи.

Ведь принципиально возможны три случая: встреча произошла до остановки, встреча произошла во время остановки, встреча произошла после остановки. Если мы не рисуем траекторий, то должны рассматривать решение для каждого случая. При этом, в двух случаях из возможных трех решения не будет. Найдем точное решение задачи арифметическим способом, используя график траекторий.

Рассчитаем сначала время встречи, если движение происходило так, как было запланировано.

1. Первый разведчик шел 13 часов, второй 10 часов.

2. Предположим, что весь путь равен 130 у.е.

3. Тогда скорость первого равна10 у.е./час, второго 13 у.е./час.

4. До 9 часов первый разведчик шел один и прошел10 у.е. пути. Ему осталось пройти120 у.е. пути.

5. Скорость сближения путников после 9 часов равна 10 + 13 = 23 у.е./час.

6. Время движения до встречи 120:23 = $5\,\frac{5}{23}$часа, поэтому время встречи равно $14\,\frac{5}{23}$часа или приблизительно14 часов 13 минут.

Рассчитаем теперь время действительной встречи.

1. До 13 часов первый путник шел 3 часа и прошел 30 у.е. пути.

Ему осталось еще пройти100 у.е. пути за 8 часов. Значит, скорость его движения после остановки равна 100:8 = 12,5 у.е./час.

2. До13 часов второй путник шел 4 часа и прошел 52 у.е. пути.

3. В13 часов расстояние между первым и вторым путниками было равно130 - 30 - 52 = 48 у.е. пути.

4. Скорость сближения путников после13 часов равна 25,5 у.е./час.

5. Время движения до встречи после13 часов равно 48:25,5 = $1\frac{15}{17}$ часа или приблизительно1 час53 минуты.

Встреча путников произойдет приблизительно в 14 часов 53 минуты. Таким образом, реальная встреча произошла позже планируемой на 260/391 часа или приблизительно на 40 минут.

Ответ: путники встретились бы раньше приблизительно на40 минут.

Заметим, что в данной задаче и точное решение дает ответ, который неудобно использовать реально.

Задачи для самостоятельного решения

1. На испытаниях нового танка каждые полчаса отмечали в таблице пройденное расстояние.

t, ч	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
S, км	75	110	140	175	250	280	290	340	380

Отметьте данные таблицы на координатной плоскости, отложив по оси абсцисс время движения танка, а по оси ординат – пройденное расстояние.

Проведите прямую усредняющую эти данные. Определите, чему будет равно расстояние:

а) через 6ч после начала движения;

б) через 8ч после начала движения;

в) через 10ч после начала движения.

Запишите уравнение усредняющей прямой.

Ответ: y = 73x

Задача №2. Диспетчер, определяя скорость самолета при плановых тренировках летного состава, внес в компьютер следующие данные: расстояние от пункта отправления до пункта прибытия – 2736 км; время полета – 3,8 ч; скорость – 720 км/ч. Пилот, на приборах в кабине самолета, зафиксировал следующие показания скорости – 200 м/с. Нет ли здесь ошибки?

Ответ: Диспетчер записал верные данные.

Для доставки важных документов существует специальная служба - фельдъегерская: в России это Государственная фельдъегерская служба Российской Федерации, подчиненная непосредственно Президенту России. Сотрудник этой службы, осуществляющий непосредственно доставку специальной почты, называется фельдъегерем.

Задача №3. Два фельдъегеря вышли из А в В навстречу друг другу. Первый вышел из В в 8 часов и пришел в А в 19 часов. Второй вышел из А в10 часов. Успеет ли второй фельдъегерь до полуночи прийти в пункт В, если встретились фельдъегере в 15 часов?

Реши задачу арифметическим способом и способом построения траекторий движения.

Ответ: второй путник успеет до полуночи прийти в пункт В.

Занятие 5.

Итоговое. Решение задач на выбор наиболее оптимального маршрута, участка местности, варианта снабжения вооруженных сил.

Кадеты выполняют практическую работу.

Решают любые 3 задачи на выбор, действуют по самостоятельно выбранному алгоритму решения задач.

Задача №1. Колонна солдат совершает марш-бросок по закону x=5+2t, где x – пройденный путь (м/с), а t – затраченное время (с). См.рисунок .

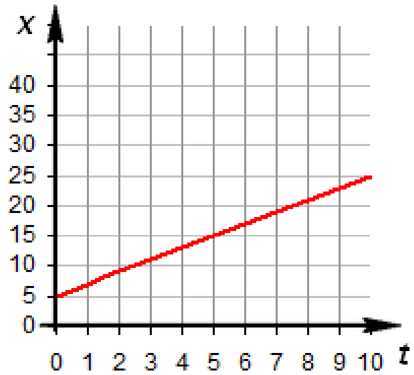
Ответьте на вопросы:

а) какой путь проделает колонна за 5с движения?

б) сколько времени потребовалось для преодоления 25м?

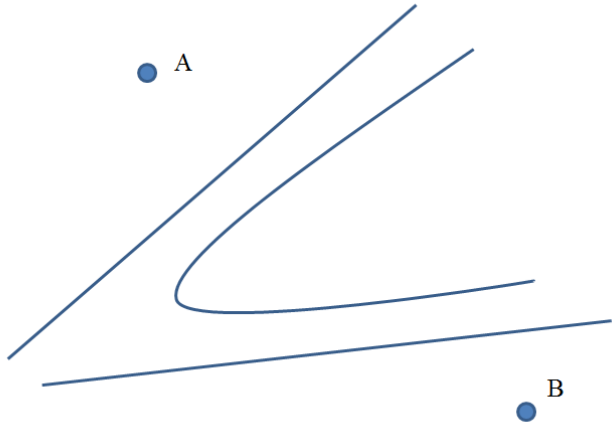
в) вычислите скорость движения колонны;

г) вычислите, сколько потребуется времени для прохождения 1 км.



Задача №2. Два кадета одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй кадет прошёл первый круг 30 минут назад. Найдите скорость первого кадета, если известно, что она на 12 км/ч меньше скорости второго.

Задача №3. Найти кратчайший путь от А до В через реку, которую необходимо пересечь дважды под прямым углом к берегам. В каких местах надо построить мосты?



Задача №4. Диспетчер, определяя скорость самолета при плановых тренировках летного состава, внес в компьютер следующие данные: расстояние от пункта отправления до пункта прибытия – 2736 км; время полета – 3,8 ч; скорость – 720 км/ч. Пилот, на приборах в кабине самолета, зафиксировал следующие показания скорости – 200 м/с. Нет ли здесь ошибки?

РАЗДЕЛ 4.
8 класс
«Математика в решении военно-прикладных задач»

Введение.

Раздел спецкурса «Математика в решении военно-прикладных задач» соответствует целям и задачам обучения кадет 8 класса. Программа курса является предметно-ориентированной, повышает интерес к изучению предмета и располагает к самостоятельному поиску решения.

За основу программы взяты темы курса алгебры и геометрии, практическое применение которых позволит решить задачи военно- прикладного характера: функция $y = kx^2$; симметрия; элементы статистики; математическое моделирование задач.

Программа курса применима для всех кадет 8 класса независимо от выбора их будущей профессии, однако военный компонент включен в образовательный процесс как обязательная составляющая каждой тематической главы.

Программа ориентирована на формирование умений использовать полученные знания для самостоятельного поиска новых знаний, для решения задач, возникающих в отношениях различных видов деятельности, в том числе и в ходе изучения других школьных дисциплин.

Познавательный материал курса будет способствовать не только выработке умений и закреплению навыков вычислений, но и формированию устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

Прикладная направленность курса и его межпредметные связи обеспечиваются систематическим обращением к примерам, раскрывающим возможности применения математики к изучению действительности и решению практических задач военной составляющей.

Цели данного курса: углубление и расширение знаний учащихся по изучаемым темам; на примерах решения военно-прикладных задач показать значимость математики в военном деле; ориентировать обучающихся к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики 8 класса; помочь овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности; развивать умение переводить различные задачи на язык математики; научить составлять и исследовать математические модели для описания и решения задач военной направленности.

Тематическое планирование

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	**Кол-во часов**	**Характеристика видов деятельности обучающихся**	**Форма контроля**
1. Функция вида у=кх^2	1ч.	Применение свойств квадратичной функции для определения траектории произведенного выстрела. Выполнение построения графика и расчета угла отклонения выстрела	Самостоятельная работа
2. Применение подобия треугольников при решении военно-прикладных задач.	1ч.	Использование признаков подобия и пропорциональности линейных размеров фигур для определения заданных расстояний на местности.	Самостоятельная работа
3. Элементы статистики в математике.	1ч.	Составляют статистические данные и выполняют расчеты на основе применения формул математической статистики.	Самостоятельная работа
4. Математическое моделирование	1ч.	Составляют математические модели для решения практических задач военного дела, выполняют оценку и решают задачи	Самостоятельная работа
5. Конкурс «Моя математическая задача в военном деле».	1ч.	Работая в творческих группах, составляют задачу, аналогичную задачам, рассмотренным на занятиях курса. Находят ее решение и ответ.	Конкурс-защита составленных задач.
ИТОГО	5 часов		

Занятие 1.

Применение свойств квадратичной функции в решении военно-прикладных задач.

На уроках алгебры вы познакомились с понятием квадратичной функции, её свойствами и графиком. И прежде, чем решать задачи на применении этого теоретического материала, его необходимо вспомнить.

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a≠0 называется квадратичной функцией.

В уравнении квадратичной функции:

- ✓ a – старший коэффициент;
- ✓ b – второй коэффициент;
- ✓ c – свободный член.

Графиком квадратичной функции является квадратичная парабола.

Если старший коэффициент a >0, то ветви параболы направлены вверх.

Если старший коэффициент a <0, то ветви параболы направлены вниз.

Второй параметр для построения графика функции - значения x, в которых функция равна нулю, или нули функции. На графике нули функции f(x) — это точки пересечения графика функции y=f(x) с осью OX.

Поскольку ордината (y) любой точки, лежащей на оси OX равна нулю, чтобы найти координаты точек пересечения графика функции y=f(x) с осью OX, нужно решить уравнение f(x)=0.

В случае квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ нужно решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

В процессе решения квадратного уравнения мы находим дискриминант: D=b2-4ac, который определяет число корней квадратного уравнения.

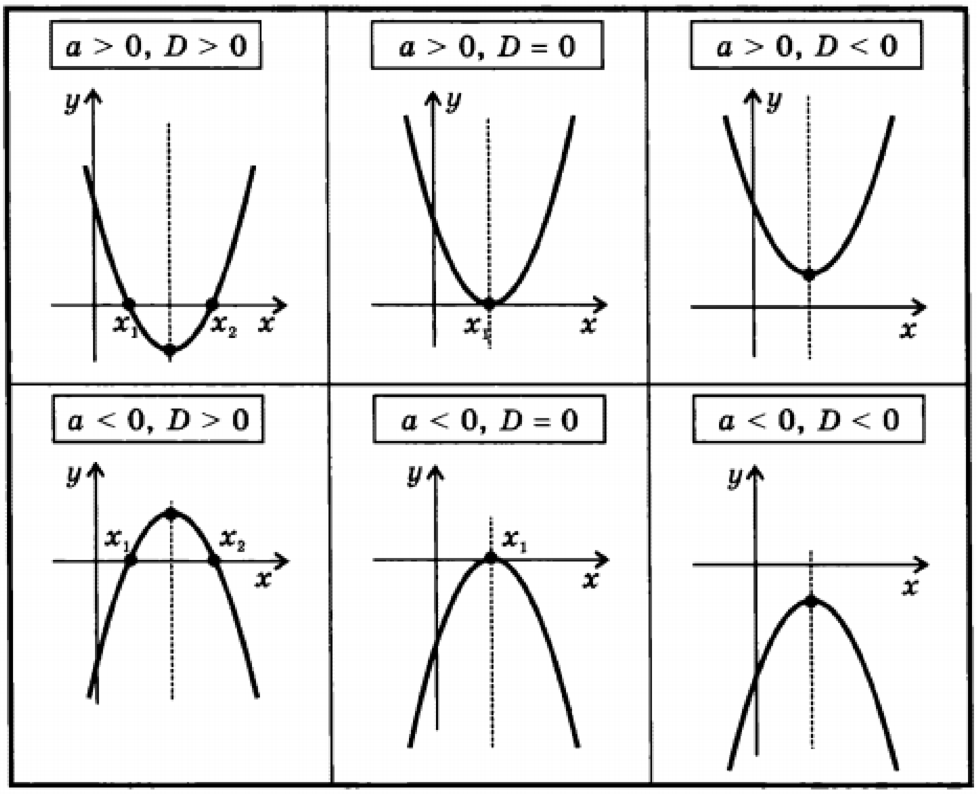
И здесь возможны три случая:

Если D <0, то уравнение $y = ax^2 + bx + c$ не имеет решений, и, следовательно, квадратичная парабола $y = ax^2 + bx + c$ не имеет точек пересечения с осью OX.

Если D=0,то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет одно решение, и, следовательно, квадратичная парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет одну точку пересечения с осью OX.

Если D>0,то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два решения, и, следовательно, квадратичная парабола y=ax2+bx+c имеет две точки пересечения с осью OX:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$



Прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси OY является осью симметрии параболы x=$-\frac{b}{2a}$

И еще один параметр, полезный при построении графика функции - точка пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью OY.

Поскольку абсцисса любой точки, лежащей на оси OY равна нулю, чтобы найти точку пересечения параболы y=ax2+bx+c с осью OY, нужно в уравнение параболы вместо x подставить ноль: y(0)=c.

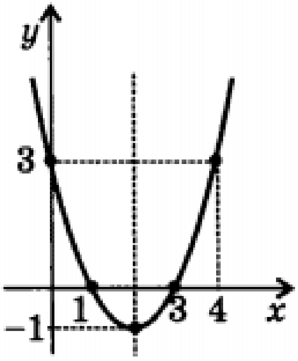
То есть точка пересечения параболы с осью OY имеет координаты (0;c).

Рассмотрим несколько способов построения квадратичной параболы. В зависимости от того, каким образом задана квадратичная функция, можно выбрать наиболее удобный.

1. Функция задана формулой $y = ax^2 + bx + c$.

Рассмотрим общий алгоритм построения графика квадратичной параболы на примере построения графика функции y=$x^2 - 4x + 3$

$y = x^2 - 4x + 3$



1. *Ветви направлены вверх*, т.к. $a = 1 > 0$.
2. *Координаты вершины* (2; −1), т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2\,;$$

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1\,.$$

3. *Ось симметрии* параболы

$$x = -\frac{b}{2a} = 2\,.$$

4. *Координаты точек пересечения с осью x:*

$(x_1;\ 0) = (1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0) = (3;\ 0)$.

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

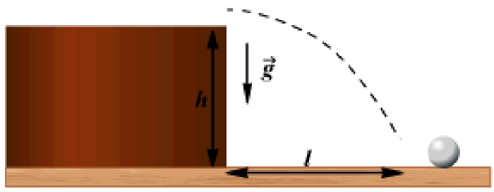
$(0;\ c) = (0;\ 3)$;

симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (4;\ 3)$.

2. Уравнение квадратичной функции имеет вид $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ - в этом уравнении x0; y0 - координаты вершины параболы. Тогда построение графика сводится к следующему алгоритму:

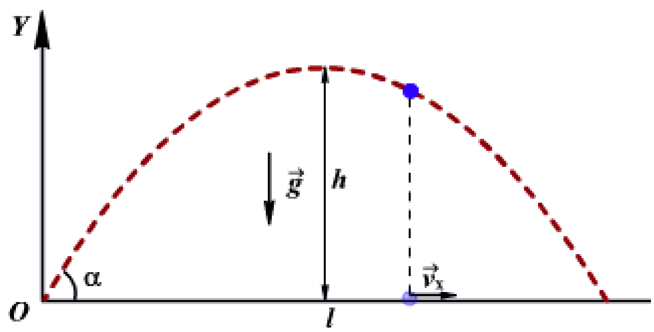
1) построить график функции $y = ax^2$;

2) переместить его на x0 единиц вправо, если x0>0 и на x0 единиц влево, если x0<0. И на y0 единиц вверх, если y0>0 и на y0 единиц вниз, если y0<0.

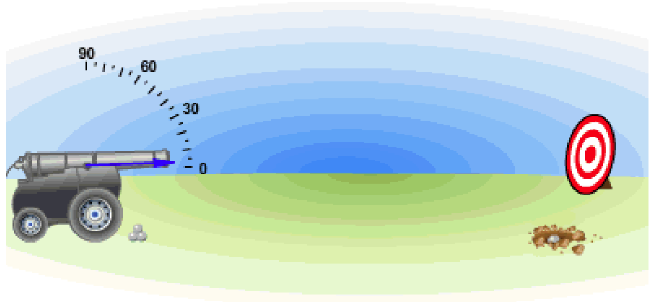


Ещё немаловажным является то свойство квадратичной функции, что своего наибольшего или наименьшего значения она достигает при x=$-\frac{b}{2a}$, т.е. наибольшим или наименьшим значением квадратичной функции является ордината вершины параболы.

Рассмотрим движение тела, брошенного в горизонтальном направлении с некоторой высоты h и начальной скоростью Vo. Траектория такого движения имеет вид спадающей ветви параболы.



Движение тела, брошенного под углом к горизонту, тоже будет описываться параболой. Угол броска определяет траекторию движения, дальность полета, максимальную высоту подъема тела.



Пример №1. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой y= $ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ $м^{-1}$, b=1 — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение:

Задача сводится к решению уравнения y=9: при заданных значениях параметров a и b:

$$-\frac{1}{100}x^2 + x = 9;$$
$$x^2 - 100x + 900 = 0;$$

получаем два корня x=10 и x=90.

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90 м

Пример №2. Из точек B и A по указанным стрелками направлениям для выполнения боевого задания выходят одновременно две подводные лодки «Ярослав Мудрый» и «Прометей». Их скорости соответственно равны 40 км/час и 16 км/час. Через сколько времени расстояние между ними окажется наименьшим, если AB = 145 км?

Решение:

Отметим буквами П и Я положение подводных лодок через t часов после выхода из точек А и В. Тогда

$$АП = 40t\text{ км}\, , ВЯ = 16t\text{ км}\, ,$$

поэтому на основании теоремы Пифагора

$$ПЯ = \sqrt{ВП^2 + ВЯ^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2} \quad ПЯ = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}$$

Наименьшее своё значение этот корень примет при том же самом t, при котором будет иметь наименьшее значение подкоренное выражение, т. е. при

$$t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8}\text{ часа} \quad t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8}\text{ часа}$$

Итак, подводные лодки «Ярослав Мудрый» и «Прометей» окажутся на кратчайшем расстоянии друг от друга через 3 часа 7 минут 30 секунд после выхода из точек А и В.

Задачи для самостоятельного решения:

1) Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой

y= $ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ $м^{-1}$, b=0,7 — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

2) Сигнальная ракета выпущена под углом 350 к горизонту с начальной скоростью 40м/с. В этом случае высота, на которой находится ракета в определенный момент времени, может быть приближенно вычислена по формуле h=2+21t-5t^2. Через сколько секунд ракета окажется на высоте 10 м?

3) С двухметровой высоты под углом к горизонту выпущен снаряд. Изменение высоты его полета (h, м) в зависимости от времени движения (t, с) описывается формулой $h = 2 + 21t - 5t^2$ Используя график, ответьте на вопросы:

а) в какое время снаряд поднимается на высоту 20м и в какое время он окажется на той же высоте при спуске?

б) на какой высоте снаряд будет через 3,5 с полета?

в) через сколько секунд после начала полета снаряд уже был на той же высоте? г) укажите наибольшую высоту подъема снаряда; д) сколько времени потребовалось снаряду, чтобы подняться на максимальную высоту?

е) Как вы думаете, почему график не доведен до пересечения с осью х?

4) Для ограждения территории для развертывания госпиталя в полевых условиях имеется 200 метров сетки-рабицы. Каковы должны быть размеры госпиталя, если он прямоугольной формы и площадь его должна быть наибольшей?

5) С башни выпустили вверх стрелу из лука. Если начальная скорость стрелы равна 50 м/с, высота башни 20 м и t (с) — время полета стрелы, то расстояние h (м) стрелы от поверхности земли в момент времени t (с) можно найти по формуле $h = -5t^2 + 50t + 20$ (приближенное значение ускорения свободного падения считается равным 10 м/с2). Какой наибольшей высоты достигнет стрела?

Занятие 2.

Применение подобия треугольников при решении военно-прикладных задач.

Изученная на уроках геометрии тема «Подобие треугольников» широко используется при решении измерительных задач.

Подобные треугольники — треугольники, углы которых соответственно равны, а стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Коэффициент подобия — число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников.

Сходственные стороны подобных треугольников — стороны, лежащие напротив равных углов.

Признаки подобия треугольников — геометрические признаки, позволяющие установить, что два треугольника являются подобными без использования всех элементов.

Первый признак:

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

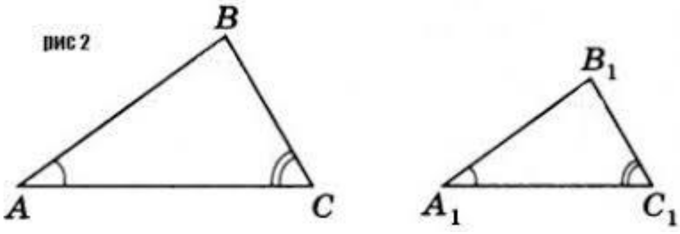


Рис. 1

Второй признак:

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, пропорциональны соответствующим сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Третий признак:

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Рассмотрим некоторые измерительные задачи.

1. Определение высоты предмета по длине его тени.

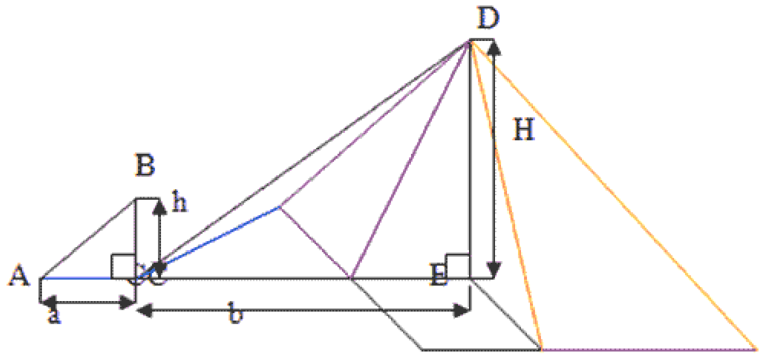


Рис. 2

BC – длина палки, DE - высота пирамиды.

∆ABC подобен D CDE (по двум углам):

∠BCA=∠CED=90;

∠ABC=∠CDE, т.к. соответственные при AB || DC и секущей AC (солнечные лучи падают параллельно)

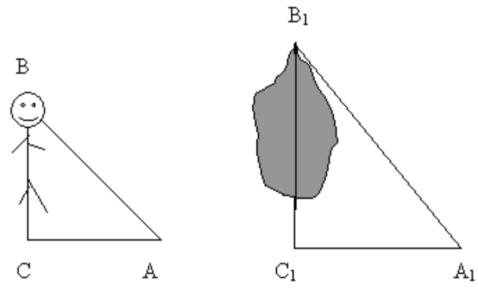
В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны:

$\frac{DE}{AD} = \frac{FE}{AB}$; ДЕ = $\frac{CE \times BC}{AC}$.

Рассмотрим ABC и ACE. <C=<F=90, <A- общий. По двум углам треугольники подобны, значит их сходственные стороны пропорциональны; AB=BC·AE:FE; AB=12*10:6=20см

<u>Ответ:</u> AB=20см.

2) Длина тени дерева равна 10,2м, а длина тени человека, рост которого 1,7м, равна 2,5м. Найдите высоту дерева.



Решение: из подобных треугольников ABC и A1B1C1 составим отношение сходственных сторон

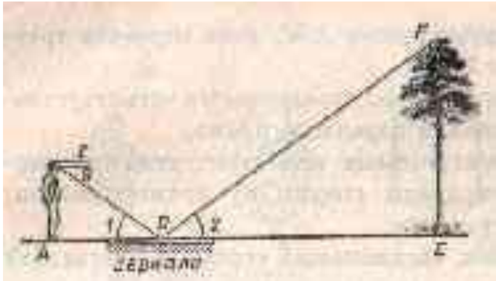
BC:B1C1=CA:C1A1;

B1C1=BC*C1A1:CA;

B1C1=1,7*10,2:2,5=6,936м

<u>Ответ:</u> 6,936м

2.Измерение высоты при помощи зеркала



Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если AC =165см, BC=12 см, AD =120см, DE = 4,8м.

Решение: из подобных треугольников ABD и EFD составим отношение сходственных сторон

AB:EF=AD:DE;

EF=AB*DE:AD;

FE=153*480:120=612см

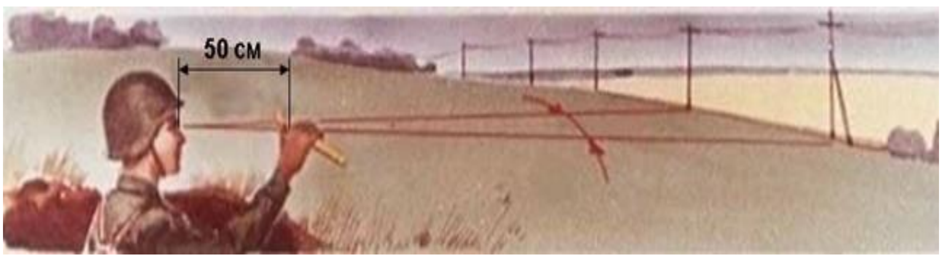
EF=6,12м

<u>Ответ:</u> EF=6,12м

Применение теории подобия в военном деле.

1)Боевое задание военному топографу: определить расстояние до объекта.

Решение:



Высота столба 4 м=400 см. На линейке 8 мм, S=400: 8·5=250м (действительное расстояние).

2) Неприятельская вышка.

Открытый участок дороги находится на полосе AB шириной в 50м; неприятельский наблюдательный пункт находится на верху колокольни высотой MN = 22м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску KB на расстоянии 500м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?

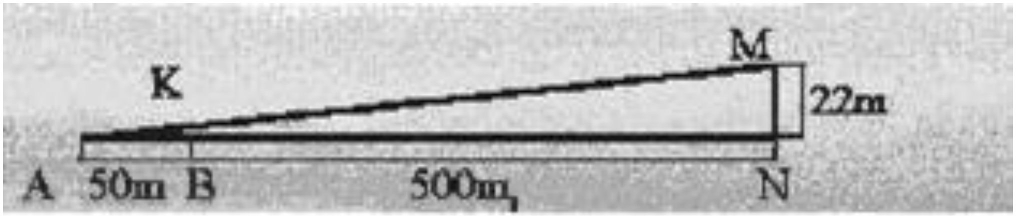


Рис. 11

Дано: $\triangle$AMN, AB = 50м, MN = 22м, BN = 500м.

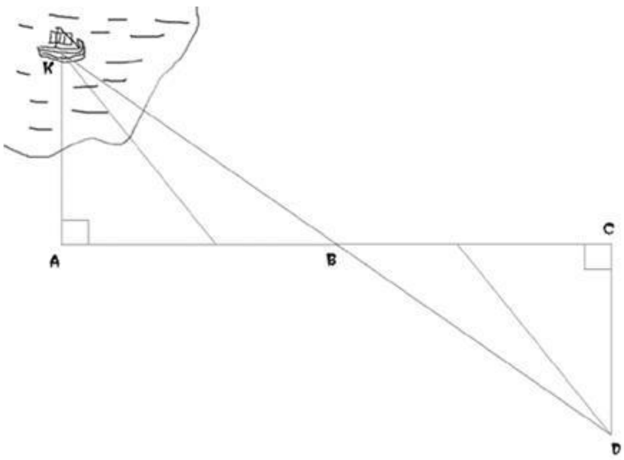
Найти: KB.

Решение: $\triangle$AKB ~ $\triangle$AMN (по 2-м углам): $\angle$A – общий, $\angle$ABK и $\angle$AMN – прямые, а если треугольники подобны, то его элементы тоже подобны. То есть,

$$\frac{BN}{AB} = \frac{MN}{KB} = k$$

$$k = \frac{550}{50} = 11$$

$$KB = \frac{MN}{k} = 2$$ м.



Ответ: 2 м.

3)Определение расстояния до кораблей в море.

Найти расстояние от точки A, находящейся на берегу до корабля

Дано: $\angle$A = $\angle$1; $\angle$B = $\angle$2; AB = a.

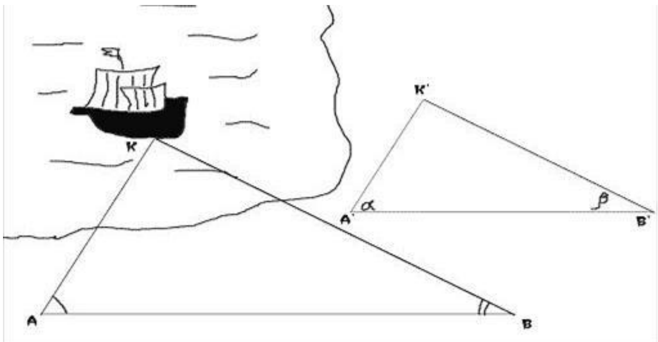
Найти: AK.

Решение:

1-й способ. Пусть корабль находится в точке K, а наблюдатель в точке A. Требуется определить расстояния KA. Построив в точке A прямой угол, необходимо отложить на берегу два равных отрезка AB = BC. В точке C вновь построить прямой угол, причем наблюдатель должен идти по перпендикуляру до тех пор, пока не дойдет до точки D, из которой корабль K и точка B были бы видны лежащими на одной прямой. Прямоугольный треугольники BCD и BAK равны, следовательно, CD = AK, а отрезок CD можно непосредственно измерить.

Второй способ, получивший название метода триангуляции, нашел применение в астрономии. С его помощью измерялись расстояния до небесных тел.

Этот метод состоит из 3-х этапов:

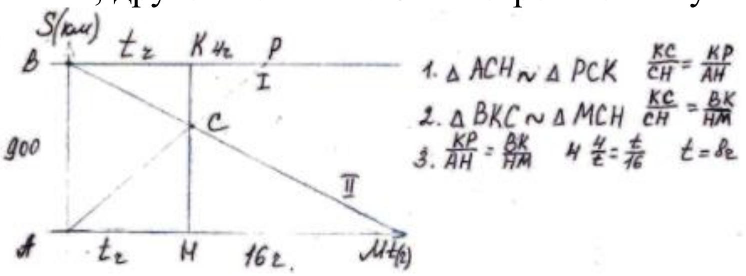


1. Измерение углов 1 и 2 и расстояния АВ.
2. Построение $\triangle$A'B'K' с углами 1 и 2 при вершинах A' и B' соответственно.
3. Учитывая подобие треугольников АВК, А'В'К' и равенство $\frac{AK}{AB}=\frac{A'K'}{A'B'}$, по известным длинам отрезков АВ, А'К' и А'В' нетрудно найти длину отрезка АК.

$$AK=\frac{A'K'\cdot AB}{A'B'}$$

Предлагаем для вашего рассмотрения ещё один пример применения подобия треугольников - при решении задач на движение.

1) Расстояние между городами А и В равно 900 км. Два военных эшелона отправляются один из А в В, другой из В в А. Они встретятся в пункте С. Первый прибывает в город В через 4 часа, а второй в А через 16 часов после встречи. Определите расстояние от пункта А до пункта С.



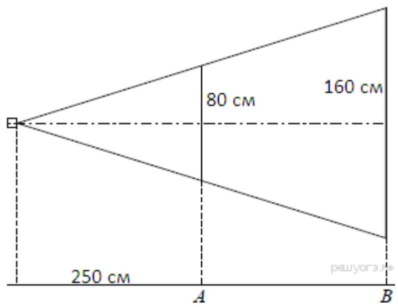
Найти: СН

Скорость 1 эшелона: 900:24=37.5км/ч

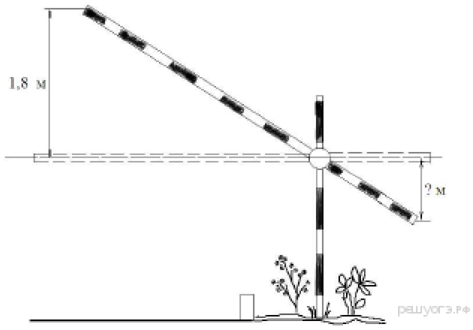
СН=37.5*8=300 км.

Задачи для самостоятельного решения

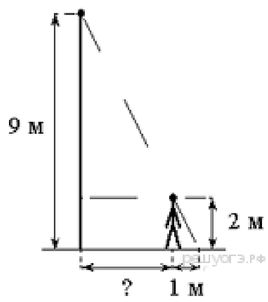
1. Проектор полностью освещает экран А высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран В высотой 160 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?



2. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо – 3 м. На какую высоту (в метрах) опустится конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,8 м?



3. На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 2 м, если длина его тени равна 1 м, высота фонаря 9 м?



4. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

5. На военных учениях из наблюдательного пункта А в расположение военного подразделения (пункт В), расстояние между которыми 20 км, отправился связист, а через 15 минут вслед за ним со скоростью 15км\ч отправился другой связист, который догнав первого, повернул назад и возвратился в А за 45 минут до прибытия первого связиста в пункт В. Найти скорость первого связиста.

Занятие 3.
Элементы математической статистики.

«Статистика – это математическая наука о том, как узнать что-то о мире, используя опыт».

Кельвин

Но на опытных данных основываются все естественные науки – такие, как физика, химия, биология и медицина, а также социология, психология, значительная часть лингвистики и литературоведения. Эти данные нуждаются в обработке для получения выводов. Поэтому все эти науки используют разнообразные статистические методы. К началу 21 века математическая статистика превратилась в огромную по объему и грандиозную по разработанным идеям науку, применяемую в разнообразных областях человеческой деятельности. В настоящее время математическую статистику определяют как теорию принятия оптимальных решений для выполнения действий. При этом последствия от действий, носят случайный характер. Таким образом математическая статистика – это отрасль научного знания, занимающаяся разработкой методов систематизации и обработки статистических данных для формирования обоснованных научных и практических выводов.

С использованием статистических данных каждый из вас встречался на подведении итогов четверти или года, рассматривая и анализируя диаграммы успеваемости взводов и курсов.

Для построения этой диаграммы потребовались следующие статистические данные:

– количество кадет, успевающих по всем предметам на «5»;
– количество кадет, успевающих по всем предметам на «5» и на «4»;
– количество кадет, имеющих по некоторым предметам «3»;
– количество кадет, имеющих по некоторым предметам «2»;
– общее количество кадет всего курса.

В настоящее время математическая статистика один из сложных разделов математики. Знакомство с этой наукой начинается с простых примеров и определений.

– Генеральная совокупность объектов исследования (В нашем примере – это количество всех кадет курса)/

– Выборочной совокупностью (выборка) (В нашем примере эта часть кадетов курса, например – взвод) Выборкой (выборочной совокупностью) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности. Объекты выборки должны достаточно хорошо отражать свойства генеральной совокупности

Среднее – среднеарифметическое для числовых данных статистического измерения

Медиана – значение измерения, стоящее в середине ряда всех измерений.

Мода - значение измерения, которое повторяется чаще всего.

Стандартное отклонение вычисляется по формуле.

STD=$\sqrt{[(\sum(x-x)^2)/n]}$,

что звучит как корень из суммы квадратов разниц между элементами выборки и средним, деленной на количество элементов в выборке.

Пример использование статистических данных для определения оценочных показателей на уроках физической культуры.

Иногда школьники интересуются: «Кто установил такие высокие нормативы для оценки «5»? Откуда такие нормативы берутся?» Для формирования нормативов использовались и статистические методы. Для определения физических возможности школьников определенного возраста были собранные и обработаны статистические данные определенной выборки с использованием среднего значения и стандартного отклонения. Результаты исследования были распространены на генеральную совокупность, т. е. на всех школьников этого возраста. Таким образом, были установлены границы оценивания

- неудовлетворительно X + 1,5k - X+ 3,0k;
- удовлетворительно X - 1,5k - X+1,5k;
- хорошо X - 2,0k - X- 1,5k;
- отлично X - 3.0k - X+ 2,0k.

Где X – среднее, k – стандартное отклонение.

С помощью формул статистики рассчитываются и другие нормы. На пример нормы обеспечения курсантов военного училища обмундированием. Помимо количества единиц вещевого обеспечения необходимо учитывать размер отдельных единиц обеспечения.

Рассмотрим пример

Результаты измерения размеров кадет 10 класса представлены в таблице:

46	48	52	50	48	44	46	50	50	54
48	48	46	50	50	48	52	48	52	56

1) Записать общий ряд измерений
2) Указать наименьшую и наибольшую варианту проведенного измерения.
3) Какова частота варианты 48 и варианты 50.
4) Определить моду и медиану измерений.

Решение: Ряд измерений 44, 46,48 50, 52, 54,56

Частота вариант измерений

Процентная частота	5%	15%	30%	20%	15%	5%	5%
Частота варианты	1	3	6	4	3	1	1
Варианта	44	46	48	50	52	54	56

Мода – 48; Медиана – 50, наибольшая варианта – 56, наименьшая варианта – 44.

Таким образом при формировании заказа на обмундирование следует учесть, что 30% заказа для данного взвода составляет обмундирование должно соответствовать размеру 48.

Пример 2. Таблица распределения частоты имеет вид

Варианта	0	1	3	5	6
Частота варианты	10	2x	3x-1	5	5+x

1) Выразить через x среднее значение.

2) Каким может быть x, если модой является 0.

3) Может ли мода распределения равняться 1?

Решение:

Найдем среднее значение, как среднее арифметическое всех измерений.

Варианта 0 повторяется 10 раз, варианта 1 повторяется 2x раз, Варианта 3 повторяется (3x-1) раз, варианта 5 повторяется 5 раз, варианта 6 повторяется (5+x) раз. Сумма всех измерений равна:

$$0\cdot 10+1\cdot 2x+3\cdot(3x-1)+5\cdot 5+6\cdot(5+x)=17x+52$$

Всего вариант 10+2x+(3x-1)+5+(5+x)=6x+19. Значит среднее значение равно

$$\frac{17x+52}{6x+19}.$$

Так как модой является варианта 0, то выполняется условие:

$\begin{cases}10>2x\\10>3x-1\\10>5+x\end{cases}$, получим $\begin{cases}5>x\\3>x\\5>x\end{cases}$, учитывая, что x – число натуральное, получаем, что x=1 или x=2.

3) Если мода измерений равняться 1, то должно выполняется условие:

$\begin{cases}2x>3x-1\\2x>10\\2x>5+x\\2x>5\\2x>0\end{cases}$, получим $\begin{cases}x<1\\x>5\\x>2{,}5\\x>0\end{cases}$, система решений не имеет, значит мода не может равняться 1.

Задания для самостоятельного решения

1) Результаты измерения размеров кадет 10 класса представлены в таблице:

162	168	157	176	185	160	158	179	162	171
164	176	177	180	181	179	180	176	165	175
168	164	179	163	160	176	162	178	164	190
160	176	175	177	164	177	175	181	176	165

1) Записать общий ряд измерений

2) Указать наименьшую и наибольшую варианту проведенного измерения.

3) какова частота варианты 168 и варианты 179

4) Определить моду и медиану измерений.

5) Распределить варианты измерений по группам:

- ✓ 1 группа – от 164 до 170
- ✓ 2 группа – от 171 до 177
- ✓ 3 группа – от 178 до 184
- ✓ 4 группа – от185 до 191

И определить количество измерений в каждой группе.

2) Таблица распределения частоты имеет вид

Варианта	0	1	3	5	6
Частота варианты	19	2	3x-1	5	4x-9

1) Выразить через x среднее значение.

2) Каким может быть x, если модой является 0.

3) Может ли мода распределения равняться 3?

Занятие 4.

Математическое моделирование как способ решения военно-прикладных задач.

На уроках алгебры вы познакомились с такими понятиями как математический язык и математические модели. Именно с помощью математического языка составляются математические модели реальных ситуаций. Затем выполняется преобразование этих моделей, используя различные математические правила, свойства, законы. На пример, по условию реальной ситуации составляется уравнение и выполняется его решение. Математической модель является график, неравенство, числовое выражение и т.п. Сегодня на уроке мы будем работать с уравнением как математической моделью реальной ситуации, описанной в условии текстовой военно-прикладной задачи.

Работа с такой моделью, как правило, состоит из трех этапов:

1 этап. *Составление математической модели.* (Введение переменной, перевод условия задачи на математический язык, составление уравнения).

2 этап. *Работа с математической моделью* (Решение уравнения с помощью правил и математических законов).

3 этап. *Ответ на вопрос задачи* (Исходя из поученного решения, формулируем ответ на вопрос задачи)

Решение задач.

Задача №1. Разведчику (разведывательному кораблю), двигавшемуся в составе эскадры, дано задание обследовать район моря на 70 миль в направлении движения эскадры. Скорость эскадры – 35 миль в час, скорость разведчика – 70 миль в час. Требуется определить, через сколько времени разведчик возвратится к эскадре?

Решение: пусть х часов катер разведчик на выполнения задания, эскадры и пройдет за это время 70х миль, эскадра пройдет 35х миль. До разворота катер пройдет 70 миль. После разворота катер и эскадра вместе пройду еще 70 миль. Общий путь эскадры и катера 140 миль. Получим уравнение70х+35х=140ю Решим уравнение:

$$70x+35x=140$$
$$105x=140$$
$$x=1\frac{1}{3}$$

Вывод: х – количество часов. 1 час 20 минут.

Ответ: 1 час 20 минут.

Задача №2

Известно, что танк Т-72 тратит топлива в 4 раза чем БМП-2. Совершив марш-бросок на 80 км Танк Е-72 потратил на 240л топлива больше, чем БМП-2 на таком же марше. Найти общий расход топлива танка Т-72 и БМП-2 на марш-броске 100 км.

Решение. Пусть БМП-2 тратит х литров горючего на 1 км пути, тогда танк Т-72 тратит 4х литров горючего на 1 км пути. При выполнении марш-броска на 80 км танк Т-72 потратит 320х литров горючего, а БМП-2 потратит 80х литров. Составим и решим уравнение:

$$320x-80x=240$$
$$240x=240$$
$$x=1$$

Вывод х=1 литр на 1 км расходует БМП-2 и 4 литра на 1 км расходует танк Т-72. Тогда на марш бросок 100 километром БМП-2 потратит 100 литров, а танк Т-72 потратит 400 литров. Общий расход топлива составит 500 литров

Ответ: 500л.

Задача №3

Группа разведчиков должна за 1 час пройти на лодках, вниз по течению реки 6 км до озера, пройти по озеру еще 10 км до пункта назначения. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найти собственную скорость лодки необходимую для успешного выполнения задачи.

Решение. Пусть х км/ч – собственная скорость лодки. Скорость движения лодки по течению х+3 км/ч. Время движения лодки по реке $-\frac{6}{x+3}$ км/ч, время движения по озеру – $\frac{10}{x}$ км/ч. Время всего маршрута – 1 час. Составим уравнение

$$\frac{6}{x+3}+\frac{10}{x}=1$$

Решение уравнения: $\frac{6}{x+3}+\frac{10}{x}=1$

$$x^2-13x-30=0$$
$$D=b^2-4ac=169-120=49$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$
$$\left[\begin{array}{l}x=15\\x=-2\end{array}\right.$$

Вывод. Скорость движения – величина положительная, скорость движения лодки может быть только 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч

Задачи для самостоятельного решения

1. Колонна солдат длиной 450м движется со скоростью 4 км в час. Из конца колонны в ее начало отправляется сержант со скоростью 5 км. Дойдя до головы колонны и отдав письменное распоряжение направляющему. Сержант с той же скоростью возвращается назад. Сколько времени затратил сержант на пут туда и обратно?

2. Разведчик получил приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно это должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 60 узлов, а скорость эскадры 40 узлов?

3. Танковый взвод вышел из расположения части и направился к месту дислокации со скоростью 25 км/ч. Через 1час 20 мин по тому же маршруту из части выехал связной на мотоцикле со скоростью 50 км/ч с приказом об изменении места дислокации взвода. Через сколько времени после своего выезда из части связной доставит приказ командиру взвода.

Вопросы к задачам

1. Какие из предложенных задач удобнее решать с помощью уравнения?
2. Какие из предложенных задач напоминают условия задач из ученика?
3. Какая из задач вам показалась самой сложной и почему?
4. Какая из предложенных задач вам показалась самой простой?
5. Какие из предложенных задач нельзя предлагать для военно-спортивной игры кадетам 5 и 6 классов и почему?

Критерии отбора задачи для ВСИ.

* Условие задачи содержит военную тематику.

* Для решения задачи можно составить математическую модель – уравнение.

* С учетом пройденного материала в 5, 6 классах уравнение должно быть линейным.

* Задача должна отличаться от задач школьного учебника.

6. В какой задаче можно предложить два различных способа решения? Расскажите и запишите второй способ решения задачи.

Занятие 5.

Конкурс – защита «Моя математическая задача в военном деле».

Учебный взвод кадет разбивается на 4 группы. Каждая группа определяют одну из тем спецкурса. По этой теме кадеты должны самостоятельно составить задачу, аналогичную задачам, рассмотренным на занятиях курса, представить ее решение и ответ. Отчет каждой группы оценивается по следующим критериям:

- оригинальность задачи;
- правильность решения;
- наличие военной составляющей;
- практическое применение в реальной ситуации.

РАЗДЕЛ 5.
9 класс
«Геометрические расчёты в военном деле»

Введение.

Математика применяется почти во всех сферах жизни общества. А попытка использования этой науки в военном деле обнаруживается еще у вавилонян. В самых ранних военно-теоретических работах (Ксенофонт, Полибий, Сунь-цзы) встречаются элементы количественного подхода. Архимед (287-212 г.г. до нашей эры) совмещал знание математики, механики и физики в решении военных практических задач. Уже позже математика появилась в баллистике (16 век), в сфере проектирования, исследования и производства оружия (с 18 века).

В современном мире сложные математические расчеты производятся с помощью электронно-вычислительных машин, но для работы на этих машинах нужны военные специалисты с глубокими знаниями математики.

Важна роль математики и в воспитании личностных качеств офицера: дисциплинированности, рациональности, целеустремленности. А развитое логическое мышление поможет добиться успехов в любой военной профессии.

В программе курса для 8 класса представлены разделы математики, имеющие практическое приложение в решении задач с военной составляющей. В каждой теме есть задачи с разобранным решением, а есть задачи, которые вы можете решить самостоятельно.

Цель курса: расширение опыта практического применения геометрических знаний при решении военно-прикладных задач.

Для достижения поставленной цели предлагается:

– активизировать знания и умения по теме «Подобие треугольников» при решении задач на определение размеров и расстояния, на движение;

– с помощью метода координат по заданным условиям и карте вычислить место встречи движущихся объектов или найти командный пункт;

– по формулам площади рассчитать минимальное число снарядов для покрытия атакуемой территории, количество материала на построение хранилища для боеприпасов и даже вероятность попадания в мишень;

– с помощью решения треугольников по известным углам рассчитать расстояние между заданными объектами.

Работа может осуществляться в разных формах:

– в индивидуальной или групповой форме на уроке (занятии);

– в форме внеурочной самостоятельной работы;

– в форме соревнования;
– в форме военной игры.

Тематическое планирование

Наименование темы	**Кол-во часов**	**Характеристика видов деятельности обучающихся**	**Форма контроля**
1. Подобие треугольников в решении военно-прикладных задач	1ч	**Знать:** определение подобных фигур, признаки подобия треугольников, свойства подобных фигур. Особенности и методы измерения расстояний на местности. **Уметь**: применять теоретический материал при решении задач военной тематики.	Фронтальный
2. Метод координат в военном деле	1ч	**Знать:** уравнения линий на плоскости, формулу нахождения расстояния между двумя точками в координатах, формулу скалярного произведения векторов. **Уметь**: находить углы между векторами, используя формулу скалярного произведения в координатах; составлять алгебраические конструкции по условию задачи; решать геометрические задачи с помощью алгебраических конструкций в системе координат.	Фронтальный
3. Расчеты площади в военном деле	1ч	**Знать:** формулы нахождения площадей плоских фигур, изученные в курсе геометрии. **Уметь**: применять теоретический материал при решении задач военной тематики.	Фронтальный

4. Решение треугольников в военно-прикладных задачах	1ч	**Знать:** определения синуса, косинуса и тангенса углов от 0 до 1 80°, формулы для вычисления координат точки, основное тригонометрическое тождество; формулировки теоремы синусов, теоремы косинусов, теорему о нахождении площади треугольника, определение скалярного произведения и формулу в координатах. **Уметь:** определять значения тригонометрических функций для углов от 0° до 180° по заданным значениям углов; находить значения тригонометрических функций по значению одной из них; решать задачи на вычисление площади треугольника; решать треугольники по двум сторонам и углу между ними; по стороне и прилежащим к ней углам; по трем сторонам; выполнять чертеж по условию задачи, применять теоремы синусов и косинусов при выполнении измерительных работ на местности.	Проверочная работа
5. Итоговый зачет	1ч		Итоговая работа по теме: «Геометрические расчеты в военном деле»
ИТОГО			**5 часов**

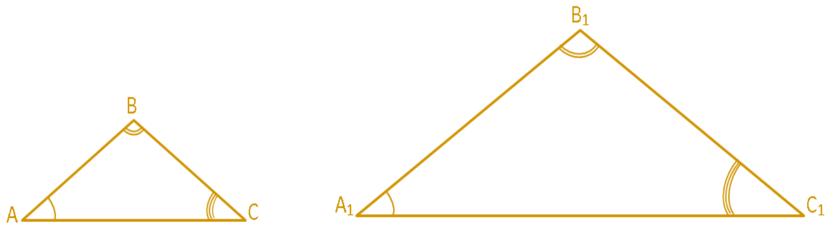
Занятие 1.

Подобие треугольников в решении военно-прикладных задач.

Свойства подобных фигур издавна широко использовались на практике при составлении планов, карт, при выполнении архитектурных чертежей и чертежей различных деталей машин и механизмов.

История практической геометрии тянется от вавилонян и древних египтян. Некоторые черты развития практической геометрии можно отметить и в Древней Руси. Уже в XVI веке в России нужды землемерия, строительства и военного дела привели к созданию рукописных руководств геометрического содержания. Первое дошедшее до нас сочинение носит название «О земном верстании, как землю верстать» (1556 год). При разборе Оружейной Палаты в Москве в 1775 году была обнаружена инструкция «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до военной науки» (1607, 1621 годы). Инструкция содержит некоторые геометрические сведения, которые сводятся к определенным приемам решения задач на нахождение расстояний через понятие подобия.

Определение. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

Признаки подобия треугольников:

1. По двум равным углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

Отношения в подобных треугольниках:

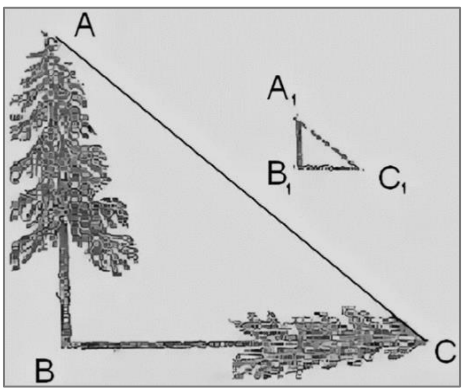
✓ отношение периметров (биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанных и описанных окружностей) равно коэффициенту подобия;

✓ отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Многие задачи, требующие нахождения расстояния на местности решаются с помощью признаков подобия треугольников, но чаще всего применяется первый признак подобия треугольников по двум углам. Такие задачи всегда имели и имеют большое значение в военном деле.

Задача на определение высоты предмета по длине его тени

Самый простой способ состоит в том, что в солнечный день можно пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции. Например, высота дерева во столько раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее тени человека

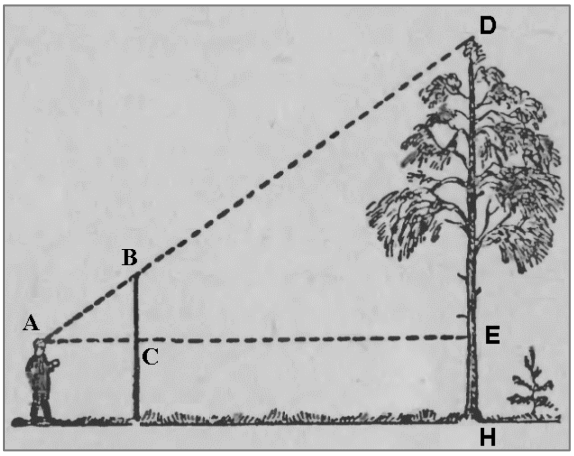


(или тени шеста). Это вытекает из геометрического подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (по двум углам).

Этот способ называется способ Фалеса. В честь греческого мудреца Фалес Милетского, который научил египтян определять высоту пирамиды по длине ее тени еще за шесть веков до нашей эры. Жители Древнего Египта задались вопросом: «Как найти высоту одной из громадных пирамид?» Фалес нашёл решение этой задачи. Он воткнул длинную палку вертикально в землю и сказал: «Когда тень от этой палки будет той же длины, что и сама палка, тень от пирамиды будет иметь ту же длину, что и высота пирамиды».

Преимущества способа Фалеса заключается в том, что не требуются вычисления. Недостатки заключаются в том, что измерить высоту предмета невозможно при отсутствии солнца и, как следствия, отсутствия тени.

Задача на определение высоты предмета с помощью прямоугольного треугольника



Для того, чтобы измерить высоту дерева DH, нужно приготовить равнобедренный прямоугольный ΔABC $(\angle A=45°)$ и, держа его вертикально, отойти на такое расстояние, при котором, глядя вдоль гипотенузы AB, нужно увидеть верхушку дерева D.

Так как $\angle A$ общий для обоих треугольников, $\angle ACB = \angle AED = 90°$ (по условию), то $\triangle ACB$ и $\triangle AED$ – подобные (по признаку подобия о двух углах).

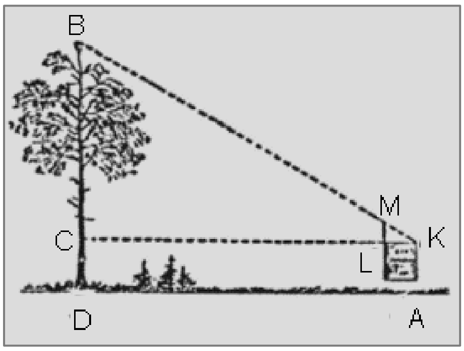
Тогда $\angle ABC = \angle ADE = 45°$ и $AE = DE$, но к получившейся длине мы должны еще прибавить рост человека, то есть длина дерева $DH = AE + EH$.

Вспомогательным равнобедренным прямоугольным треугольников при решении данной задачи может быть булавочный прибор, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы намечают три точки – вершины равнобедренного прямоугольного треугольника – и в них втыкают по булавке.

Если нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон, то можно перегнуть любой кусок бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, - получим прямой угол. Та же бумага пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

Задача на определение высоты предмета с помощью записной книжки и карандаша

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты можно использовать карманную записную книжку и карандаш. Она поможет построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота.

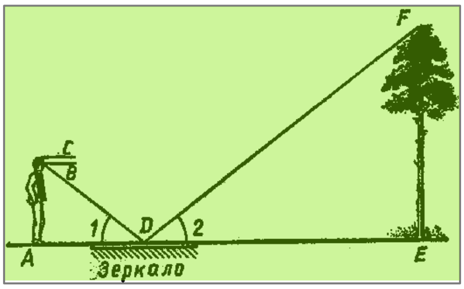


Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощенном рисунке. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигаться над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки K видеть вершину B дерева, покрытой кончиком M карандаша. Тогда вследствие подобия $\triangle KLM$ и $\triangle KCB$ высота BC определяется из пропорции: $\frac{BC}{LM} = \frac{KC}{KL}$.

Расстояние LM, KL и KM измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить еще длину CD, т.е. – на ровном месте – высоту глаза над почвой. Так как ширина KM книжки неизменна, то если всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева, высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части LM карандаша. Поэтому можно заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш.

Задача на определение высоты предмета с помощью зеркала

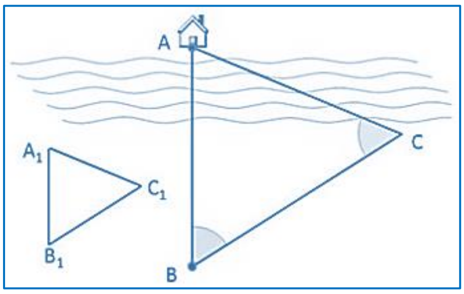
На некотором расстоянии от измеряемого дерева, на ровной земле в точке D кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку A, стоя в которой наблюдатель видит в зеркальце верхушку F дерева. Тогда дерево (FE) во столько раз выше роста наблюдателя (AB), во сколько раз расстояние DE от зеркала до дерева больше расстояния AD от зеркала до наблюдателя.



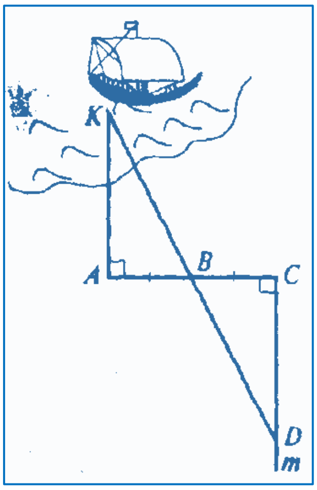
Способ основан на законе отражения света. Вершина F отражается в точке D так что $\angle BDA = \angle FDE$. Из подобия $\triangle BDA$ и $\triangle FDE$ следует, что $\frac{AB}{FE} = \frac{AD}{DE}$. В этой пропорции остается лишь заменить AB равным ему AC, чтобы обосновать указанное соотношение.

Преимущества способа: можно производить измерения в любую погоду; простота формулы. Недостатки: нельзя измерить, высоту предмета в густом насаждении, применяется к одиноко стоящему дереву.

Задача на определение расстояния до недоступной точки



Для того, чтобы найти расстояние от пункта *B* до недоступного пункта *A* выбираем точку *C*, провешиваем отрезок *BC* и измеряем его. Затем измеряем $\angle B$ и $\angle C$. На листе бумаги строим какой-нибудь $\triangle A_1B_1C_1$, у которого угол $\angle B_1$ равен $\angle B$, $\angle C_1$ равен $\angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и B_1C_1 этого треугольника. Так как треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ подобны, то из пропорциональности их сторон найдём *AB*.



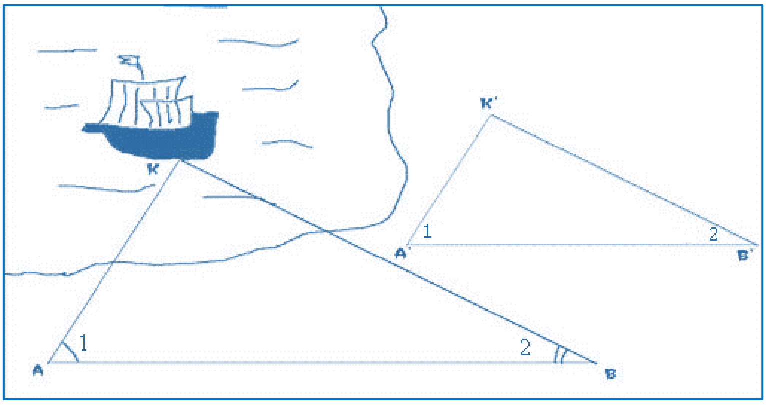
Задачи на определение расстояния до кораблей в море

Первый способ. Пусть корабль находится в точке *К*, а наблюдатель в точке *А*. Требуется определить расстояния *КА*. Построив в точке *А* прямой угол, необходимо отложить на берегу два равных отрезка *АВ* = *ВС*. В точке *С* вновь построить прямой угол, причем наблюдатель должен идти по перпендикуляру m до тех пор, пока не дойдет до точки *D*, из которой корабль *К* и точка *В* были бы видны лежащими на одной прямой. Прямоугольные треугольники $\triangle BCD$ и $\triangle BAK$ равны, следовательно, *CD* = *AK*, а отрезок *CD* можно непосредственно измерить.

Второй способ. Получил название - метод триангуляции, нашел применение в астрономии. С его помощью измерялись расстояния до небесных тел.

Этот метод состоит из трех этапов:

1. Измерение $\angle 1$ и $\angle 2$ и расстояния *АВ*.



2. Построение $\triangle A'B'K'$ с $\angle 1$ и $\angle 2$ при вершинах A' и B' соответственно.

3. Учитывая подобие треугольников $\triangle ABK$, $\triangle A'B'K'$ и равенство отрезков *AB, A'K' и A'B'*, легко найти длину отрезка *AK*.

Теория подобия треугольников часто используется при решении алгебраических задач геометрическим методом. Решить задачу геометрическим методом – значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур. Одну и ту же задачу можно также решить различными геометрическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения используются различные построения или свойства фигур.

Основы геометрического метода решения задач на движения

С помощью графиков линейных функций можно смоделировать ситуации из задач на движения. Для этого необходимо знать:

- ✓ Равномерное прямолинейное движение рассматривается по закону

$$S(t) = v \cdot t$$

(где $S(t)$ – путь, пройденный телом с постоянной скоростью v за время t).

- ✓ Скорость считается всегда величиной положительной.
- ✓ Графиком такого движения является прямая или отрезок.

Для того, чтобы решить текстовую задачу с помощью графиков линейной функции, надо:

1) задать систему координат sOt с осью абсцисс Ot и осью ординат Os;

2) выбрать начало отсчета: начало движения объекта или из нескольких объектов избирается тот, который начал двигаться раньше или прошел большее расстояние;

3) по оси абсцисс отметить интервалы времени в его единицах измерения, а по оси ординат отметить расстояние в выбранном масштабе его единиц измерения;

4) провести линии движения каждого из объектов, указанных в условии задачи, через координаты хотя бы двух точек прямых. Обычно скорость объекта даёт информацию о прохождении расстояния за одну единицу времени от начала его движения. Если объект начинает двигаться позже, то точка начала его движения смещена на заданное число единиц вправо от начала отсчета вдоль оси абсцисс. Если объект начинает двигаться с места, удаленного от начала отсчета на определённое расстояние, то точка начала его движения смещена вверх вдоль оси ординат.

Место встречи нескольких объектов на координатной плоскости обозначено точкой пересечения прямых, изображающих их движение, значит, координаты этой точки дают информацию о времени встречи и удаленности места встречи от начала отсчета. Разность скоростей движения двух объектов определяется длиной отрезка, состоящего из всех точек с абсциссой v_1, расположенных между линиями движения этих объектов.

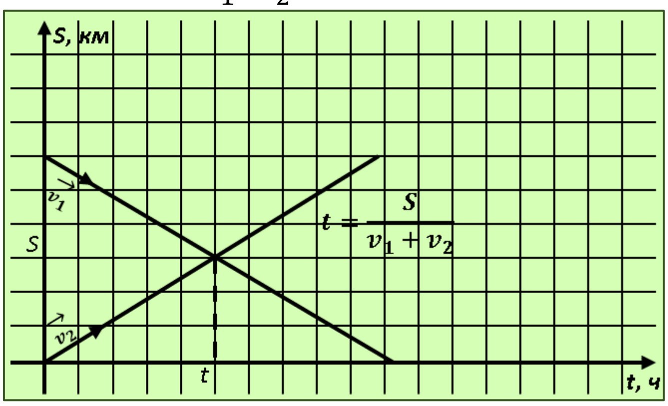
Точки на координатной плоскости должны быть отмечены в соответствии с масштабом по условию задачи, и линии должны быть построены аккуратно. От этого зависит точность решения задачи. Поэтому очень важно удачно выбрать масштаб делений на осях координат: его надо подобрать таким образом, чтобы координаты точек определялись более точно и, по возможности, располагались в узловых точках, т.е. в пересечениях делений осей координат. Иногда полезно за единичный отрезок на оси абсцисс брать количество клеток, кратное условиям задачи относительно времени, а на оси ординат – количество клеток, кратное условиям задачи относительно расстояния. Например, 12 мин по времени требуют выбора числа клеток кратное 5, так как 12 мин составляет пятую часть часа.

Решение задач графическим методом требует творческого подхода и глубокого понимания процессов, описанных в задаче. Например, в задаче на движение навстречу графики имеют начала движений в точках с разными ординатами, а прямые носят разный характер монотонности: возрастание и убывание. В задаче на движение в одном направлении прямые одновременно или возрастают, или убывают с разной крутизной, пропорциональной разным скоростям движения объектов.

Изображая графики процессов, можно находить зависимости между величинами, применяя геометрические знания, а можно решать задачу привычным способом. Построенная модель зависимости между величинами помогает увидеть отношения между этими величинами. На этих двух подходах основано использовании графиков при решении текстовых задач. С помощью графиков линейных функций можно смоделировать ситуации из задач.

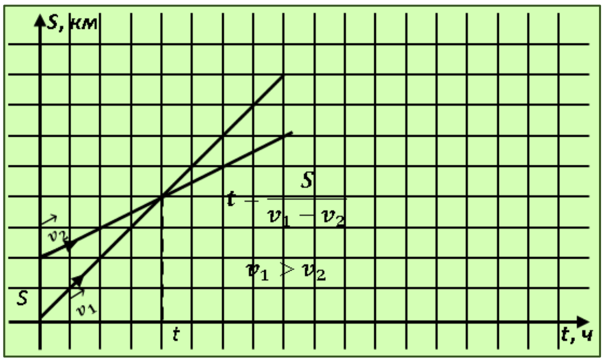
Задача на «движение навстречу»

Пусть два батальона движутся навстречу друг другу из двух позиций A и B, расстояние между которыми s (единиц длины), со скоростями v_1 и v_2 (единиц скорости). При этом скорость сближения этих батальонов равна v_1+v_2 (единиц скорости), а время встречи $t = \frac{S}{v_1+v_2}$ (единиц времени).



Задача на «движение вдогонку»

Пусть два тела движутся в одном направлении из двух точек A и B, расстояние между которыми s (единиц длины), со скоростями v_1 и v_2 (единиц скорости), где $v_1 > v_2$. При этом скорость сближения этих тел равна v_1-v_2 (единиц скорости), а время до встречи $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$ (единиц времени).

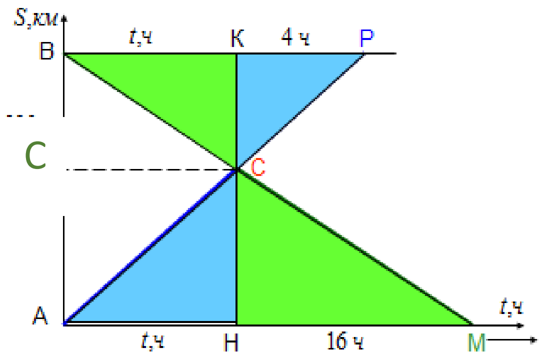


Рассмотрим примеры применения метода подобия в решении задач.

Пример 1. Расстояние между городами А и В равно 900 км. Два военных эшелона одновременно отправляются, один из А в В, другой из В в А. Они встречаются в пункте С. Первый эшелон прибывает в город В через 4 часа, а второй в А через 16 часов после встречи. Определите расстояние АС.

Решение:

1) AP – график движения первого эшелона, BM – график движения второго эшелона.



2) В Δ АСН и Δ РСК $\angle АНС = \angle РКС = 90^0, \angle АСН = \angle РСК$ как вертикальные. Следовательно, Δ АСН ~ Δ РСК и $\frac{СН}{СК} = \frac{АН}{РК}$.

3) В Δ МСН и Δ ВСК $\angle МНС = \angle ВКС = 90^0, \angle МСН = \angle ВСК$ как вертикальные. Следовательно, Δ МСН ~ Δ ВСК и $\frac{СН}{СК} = \frac{МН}{ВК}$.

4) Обозначим $ВК = t$. Из пунктов 2, 3 следует, что

$$\frac{АН}{РК} = \frac{МН}{ВК}, \ \frac{t}{4} = \frac{16}{t}, t^2 = 64, t = 8.$$

5) В ΔМСН и ΔМАВ $\angle МСН = \angle МВА = 90^0, \angle СМН -$ общий. Следовательно,

$$\Delta MCH \sim \Delta MAB \text{ и } \frac{CH}{AB} = \frac{MH}{MA}.$$

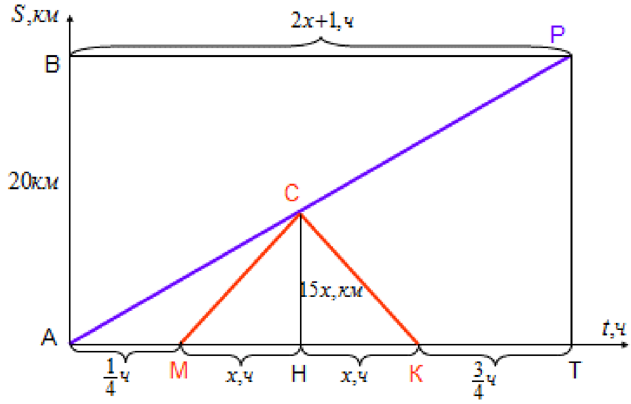
Так как $CH = \frac{2}{3}AB$, то $AC = 600$ км.

Ответ: 600 км расстояние AC.

Пример 2. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 20 км, выдвинулся отряд, а через 15 мин вслед за ним со скоростью 15 км/ч отправился другой отряд, который догнав первого, повернул назад и возвратился в А за 45 мин до прибытия первого отряда в пункт В. Найдите скорость первого отряда.

Решение:

1) *AP* – график движения первого отряда, *MCK* – график движения второго отряда, x ч время движения второго отряда до встречи с первым.



2) В ΔACH и ΔAPT $\angle ACH = \angle APT = 90^0$, $\angle CAH$ – общий.

$$\Delta\ ACH \sim \Delta\ APT \Rightarrow \frac{CH}{PT} = \frac{AH}{AT}, \text{то есть } \frac{15x}{20} = \frac{x+\frac{1}{4}}{2x+1}. \text{ Получаем:}$$

$$30x^2 + 15x = 20x + 5$$

$$30x^2 - 5x - 5 = 0 \,|\, : 5$$

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$$

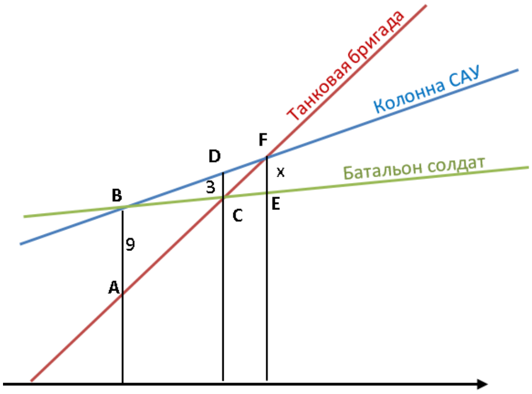
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \text{ не удовлетворяет условию}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$$

3) Время движения первого отряда – 2 ч $\Rightarrow$ скорость – $10\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ответ: 10 км/ч скорость первого отряда.

Пример 3. Батальон солдат, колонна САУ и танковая бригада движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент времени, когда батальон солдат и колонна САУ находились в одной точке, танковая бригада была на расстоянии 9 км позади них. А в тот момент, когда танковая бригада догнала батальон солдат, колонна САУ обогнала батальон солдат на 3 км. Найти количество километров, на которые батальон солдат отстал от колонны САУ в тот момент, когда колонна САУ настигла танковая бригада.



Решение:

1) В ΔFDC и ΔFBA $\angle FDC = \angle FBA$ как соответственные при $DC||AB$ и секущей BD, $\angle AFB$ – общий. Значит, $\Delta FDC \sim \Delta FBA$ и $\dfrac{FC}{FA} = \dfrac{DC}{BA}$, то есть $\dfrac{FC}{FA} = \dfrac{3}{9}$. Следовательно, $\dfrac{FC}{CA} = \dfrac{1}{2}$.

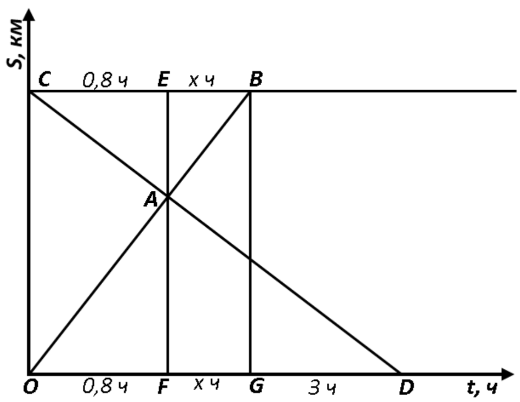
2) В ΔCAB и ΔCFE $\angle CBA = \angle CEF$ как накрест лежащие при $FE||AB$ и секущей BE, $\angle FCE = \angle ACB$ как вертикальные $\Rightarrow$ $\Delta CAB \sim \Delta CFE$. Значит, $\frac{CE}{BC} = \frac{FE}{AB}$, т. е. $\frac{1}{2} = \frac{x}{9}$. Следовательно, $x = 4{,}5$.

Ответ: на 4,5 км отстал батальон солдат.

Пример 4. Из городов *A* и *B* навстречу друг другу выехали Т-34 и БТР. Т-34 приехал в *B* на 3 часа раньше, чем БТР приехал в *A*, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из *B* в *A* БТР?

Решение:

Построим графики движения участников движения в системе координат *tOS*.



Так как в задаче движение рассматривается как равномерный процесс, то отрезок *OB* – график движения Т-34, а отрезок *CD* – график движения БТР, *OF* – изображает время движения до встречи, *EB* – время движения Т-34 после встречи до села *B*, *FD* – время движения БТР после встречи. Время движения Т-34 после встречи обозначим за *x*. Тогда *EB* = *FG* = *x*.

1) В ΔCAE и ΔDAF $\angle CAE = \angle DAF$ как вертикальные, $\angle ACE = \angle ADF$ как внутренние накрест лежащие при $CB \parallel OD$ и секущей $CD \Rightarrow \frac{CE}{FD} = \frac{AE}{AF}$.

2) В ΔBAE и ΔOAF $\angle BAE = \angle OAF$ как вертикальные, $\angle ABE = \angle AOF$ как внутренние накрест лежащие при $CB \parallel OD$ и секущей $OB \Rightarrow \frac{BE}{OF} = \frac{AE}{AF}$

3) Из пунктов 1) и 2) следует $\frac{CE}{FD} = \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{OF}$. Рассмотрим $\frac{CE}{FD} = \frac{BE}{OF}$.

$$\frac{0{,}8}{x+3} = \frac{x}{0{,}8}$$

$$x^2 + 3x = 0{,}64$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 2{,}56 = 11{,}56$$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-3{,}4}{2} = -3{,}2$ не удовлетворяет смыслу задачи

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+3.4}{2} = 0{,}2$$

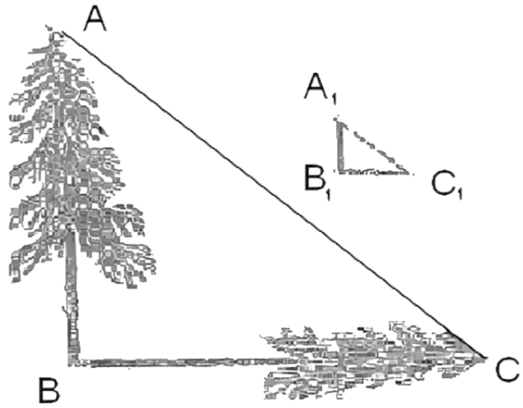
Следовательно, БТР потратил на весь путь *OD = OF + FG + GD = 0,8 + +0,2 + 3 = 4* ч

Ответ: 4 ч потратил БТР на весь путь.

Пример 5. Длина тени дерева равна 10,2м, а длина тени человека, рост которого 1,7м, равна 2,5м. Найдите высоту дерева

Решение:

1) *AB* – высота дерева, A_1B_1 – рост человека, *BC* – длина тени дерева, B_1C_1 – длина тени человека.



2) В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = 90^0, \angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ – общий $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Значит, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, то есть $\frac{x}{10{,}2} = \frac{1{,}7}{2{,}5}$.

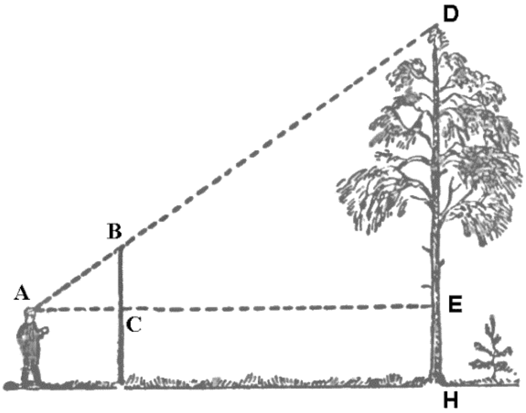
Следовательно, $x = 1{,}7 \cdot 10{,}2 : 2{,}5 \approx 6{,}94$ м.

Ответ: 6,94 м.

Пример 6. Человек, держа вертикально, прямоугольный равнобедренный треугольник видит, глядя вдоль гипотенузы вершину дерева, находясь на расстоянии 12,7 м, рост наблюдателя 1,8 м. Найдите высоту дерева.

Решение:

1) $\Delta\, ABC$ − прямоугольный, $AC = BC$, EH – рост человека, DH – высота дерева.



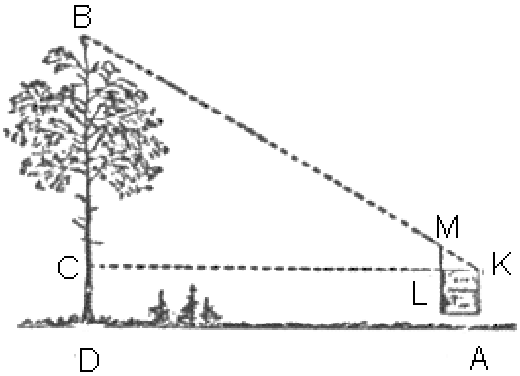
2) В $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, ADE$ $\angle BCA = \angle DEA = 90^0, \angle DAE = 45^o$ − общий $\Rightarrow$ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ADE \Rightarrow AE = DE$.

Получаем, $DH = DE + EH = 12{,}7 + 1{,}8 = 14{,}5$ м.

Ответ: высота дерева 14,5 м.

Пример 7. Наблюдатель держит возле глаз записную книжку шириной 10 см (0,1 м), выдвинув карандаш на 4 см (0,04 м) увидел, что вершина дерева совпала с концом карандаша. Расстояние до дерева 18 м, рост наблюдателя 1,75 м. Вычислите высоту дерева.

Решение:



В $\Delta\, KML$ и $\Delta\, KBC$ $\angle BCK = \angle MLK = 90^0, \angle BKC$ − общий $\Rightarrow$ $\Delta\, KML \sim \Delta\, KBC$. Значит, $\dfrac{KL}{KC} = \dfrac{LM}{CB}$, то есть $\dfrac{0{,}1}{18} = \dfrac{0{,}04}{x}$.

Следовательно, $x = \dfrac{0{,}04 \cdot 18}{0{,}1} = 7{,}2$ м.

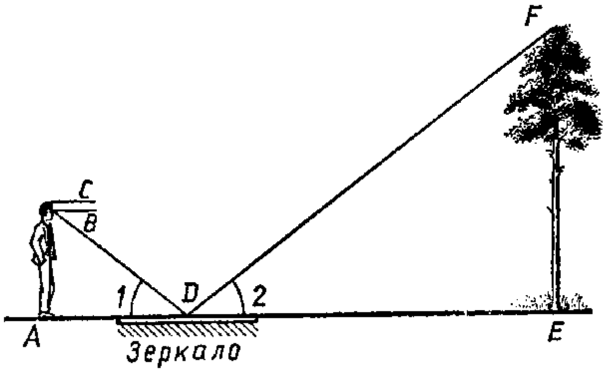
$BD = BC + CD = 7{,}2 + 1{,}75 = 8{,}95$ м.

Ответ: высота дерева 8,95 м.

Пример 8. Луч света *FD*, отражаясь от зеркала в точке *D*, попадает в глаз человека (точку *B*). Определите высоту дерева, если *AC* = 165 см, *BC* = 12 см, *AD* = 120 см, *DE* = 4,8 м.

Решение:

1) AC – рост человека, FE – высота дерева.



2) В $\Delta\ BDA$ и $\Delta\ FDE$ $\angle CAD = \angle FED = 90^0, \angle BDA = \angle FDE$ (луч падения равен углу отражения) $\Rightarrow \Delta\ BDA \sim \Delta\ FDE$.

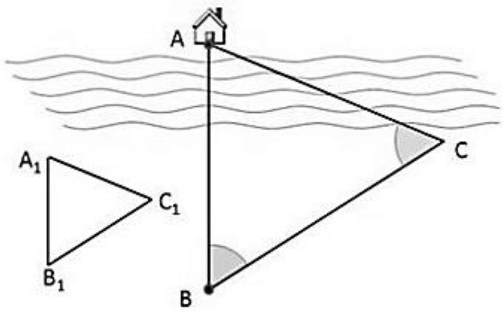
Значит, $\frac{AB}{FE} = \frac{AD}{DE}$, то есть $\frac{165-12}{x} = \frac{120}{480}$.

Получаем $x = 153 \cdot 480 : 120 = 153 \cdot 4 = 612$ см.

Ответ: высота дерева 6,12 м.

Пример 9. Для определения расстояния от точки *B* до недоступной точки *A* на местности выбрали точку *C* и измерили отрезок *BC,* ∠BCA и ∠CBA. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику *ABC*. Найдите *AB*, если *BC* = 84 м, B_1C_1 = 12,6 см, A_1B_1 = 14,4 см.

Решение:



1) $\Delta\ \mathrm{ABC} \sim \Delta\ \mathrm{A_1B_1C_1}$ по построению. B_1C_1 = 12,6 см = 0,126м, A_1B_1 = 14,4 см = 0,144 м.

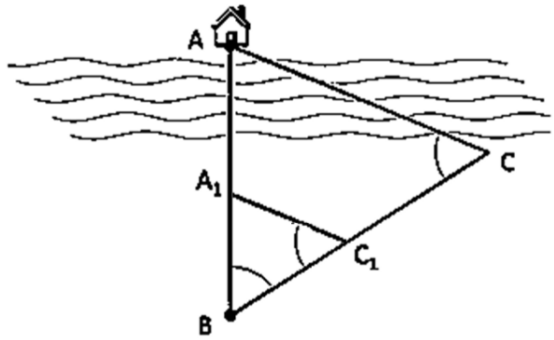
2) Так как $\Delta\ \mathrm{ABC} \sim \Delta\ \mathrm{A_1B_1C_1}$, то $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B_1C_1}}$, то есть $\frac{x}{0{,}144} = \frac{84}{0{,}126}$.

Получаем, $x = 84 \cdot 0{,}144 : 0{,}126 = 96$ м.

Ответ: расстояние AB = 96 м.

Пример 10. Для определения ширины реки AA_1 на местности выбрали точки B и C_1 так, что точка $\mathrm{A_1}$ лежит на AB и точка C_1 лежит на *BC*, $\angle \mathrm{BC_1A_1} = \angle \mathrm{BCA}$. Найдите AA_1, если *BC* = 100 м, BC_1 = 32 м, BA_1 = 40 м.

Решение:



1) В ΔBAC и ΔBA_1C_1, $\angle ABC$ − общий, $\angle A_1C_1B = \angle ACB \Rightarrow$ $\Delta BAC \sim \Delta BA_1C_1$

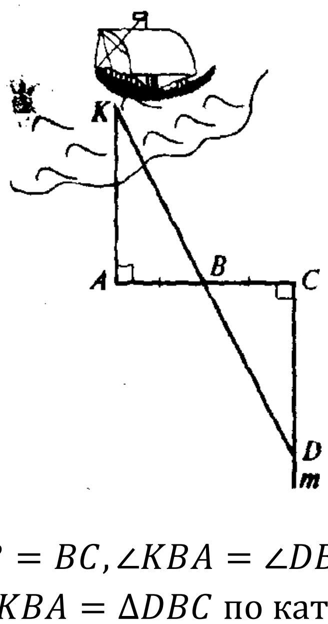
2) Так как Δ ABC $\sim \Delta$ A_1BC_1, то $\frac{AB}{A_1B} = \frac{BC}{BC_1}$, то есть $\frac{x+40}{40} = \frac{100}{32}$. Значит, $x = 100 \cdot 40 : 32 - 40 = 85$ м.

Ответ: ширина реки 85 м.

Пример 11. Пусть корабль находится в точке *К*, а наблюдатель находится в точке *А*. Определить расстояние от корабля, находящегося в море до берега, если *DC* = 36 м.

Решение:

1) Построим прямой угол с вершиной в точке *A*, откладываем на берегу отрезок *AC* и делим его пополам точков *B*. Затем из точки *C* передвигаемся по прямой, перпендикулярной *BC* до тех пор, пока не дойдём до точки *D*, из которой точки *К* и *B* видны лежащими на одной прямой.



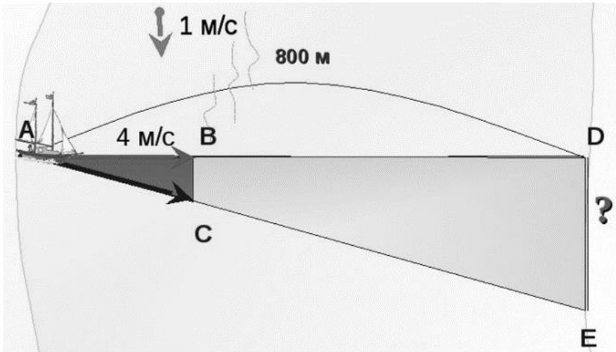
2) В Δ KAB и Δ DCB $AB = BC, \angle KBA = \angle DBC$ как вертикальные, $\angle KAB = \angle DCB = 90^o \Rightarrow \Delta KBA = \Delta DBC$ по катету и острому углу.

Значит, $KA = DC = 60$ м.

Ответ: 60 м расстояние до корабля.

Пример 12. Катер, переправляясь через реку, движется перпендикулярно течению реки со скоростью 4 м/с в системе отсчёта, связанной с водой. На сколько метров будет снесён катер течением, если ширина реки 800 м, а скорость течения 1 м/с?

Решение:



1) В $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, ADE$ $\angle DAE$ — общий, $\angle ABC = \angle ADE = 90^o \Rightarrow$ $ABC \sim \Delta ADE$.

2) Так как $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, то $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$, то есть $\frac{4}{800} = \frac{1}{x}$.

Получаем, $x = 1 \cdot\ 800 : 4 = 200$ м.

Ответ: на 200 м снесёт катер.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Для определения высоты объекта измерили длину его тени и длину тени вертикально установленного шеста. Длина тени объекта равна 56 *м*, длина шеста 3 *м*, а тень от него имеет длину 6 *м*. Определить высоту объекта.

Задача 1.2. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное плечо – 3 м. На какую высоту (в метрах) опустится конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,8 м?

Задача 1.3. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

Задача 1.4. Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит на расстоянии 16 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 9 м. Определите высоту фонаря?

Задача 1.5. Найдите высоту здания (в метрах), длина тени которого равна 27 м, если тень человека ростом 1 м 60 см равна 2 м 40 см.

Задача 1.6. «Неприятельская вышка». Открытый участок дороги находится на полосе АВ шириной в 50 м; неприятельский наблюдательный пункт находится на верху колокольни высотой MN = 22 м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску КВ на расстоянии 500 м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?

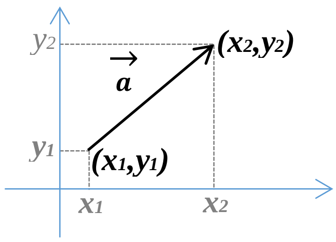
Занятие 2.
Метод координат в военном деле.

Метод координат облегчает решение многих геометрических задач. Ему посвящен отдельный раздел математики – аналитическая геометрия. Впервые метод координат был применён французским математиком Рене Декартом в 1637 году.

Суть метода заключается в том, что геометрическая фигура помещается в прямоугольную систему координат, после чего все точки фигуры обретает свои координаты, связанные уравнением, неравенством, системой уравнений или неравенств. И решение геометрической задачи сводится к решению этих алгебраических конструкций.

В курсе геометрии 9 класса подробно рассматриваются и доказываются следующие алгебраические соотношения для геометрических понятий.

Координаты и длина вектора по координатам начала и конца

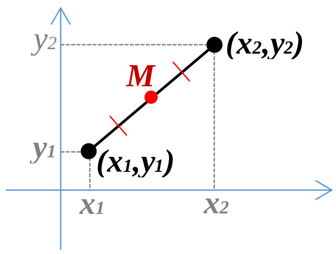


Чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца $(x_2,\ y_2)$ вычесть соответствующие координаты начала $(x_1,\ y_1)$:

$$\vec{a}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Длина вектора $\vec{a}\{x, y\}$ вычисляется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

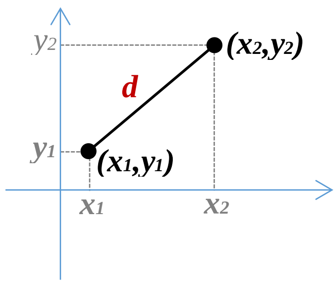
Координаты середины отрезка



Координаты середины отрезка с концами в точках $(x1,\ y1)$ и $(x2,\ y2)$ равны полусумме соответствующих координат его концов:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Расстояние между двумя точками



Расстояние d между точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2) вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Уравнение прямой

Уравнение любой прямой можно записать в виде:

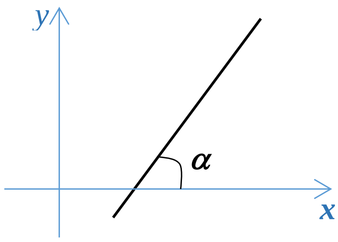
$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c имеют конкретные числовые значения (хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля), x и y – переменные. И только координаты $(x,\ y)$ точек прямой обращают это уравнение в верное числовое равенство.

Если в этом уравнении коэффициент b отличен от нуля, то уравнение можно записать в виде: $y = kx + m$.

Если коэффициент $b = 0$, то уравнение можно записать в виде: $x = n$.

Число k называют *угловым коэффициентом прямой*; он равен тангенсу угла наклона этой прямой – угла α, который считают против часовой стрелки от положительного направления Ox к прямой: $k = tg\alpha$.

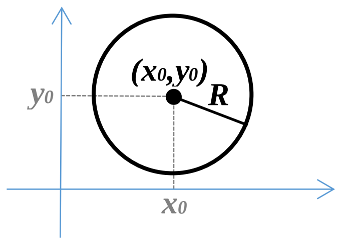


Две параллельные прямые, не параллельные оси ординат, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

Если же прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1.

Уравнение окружности

В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) имеет вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.



В частности, уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Скалярное произведение векторов

По определению, скалярное произведение двух векторов – это произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}).$$

Из определения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны. Если угол между векторами – острый, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$. Если угол между векторами – тупой, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Как следствие, получаем формулу косинуса угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$:

$$Cos\ \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}.$$

Пример 1.

Из пунктов А (1; -1) и В (6; 3) одновременно навстречу друг другу выехали соответственно бронеавтомобиль «Тигр» и бронетранспортер БТР-80.

Найдите координаты места встречи машин, если известно, что машины движутся равномерно по прямолинейной дороге, а скорость бронеавтомобиля в два раза больше скорости бронетранспортера.

«Тигр» - российский многоцелевой автомобиль повышенной проходимости, бронеавтомобиль, армейский автомобиль-вседорожник.

«Бронетранспортер» - бронированная машина для транспортировки личного состава и материальных средств к месту выполнения боевой задачи и эвакуации раненых с поля боя.

Решение:

Так как машины выехали одновременно, а скорость одной из них в два раза больше скорости другой, то расстояние, пройденное бронеавтомобилем, будет в два раза больше расстояния, пройденного бронетранспортером. А значит точка М, в которой произойдет встреча, делит отрезок АВ в отношении 2:1.

Составим геометрическую модель задачи.

$\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{MB}$

Пусть *M (x; y)*.

Тогда $\overrightarrow{AM}\{x-1; y+1\}$,

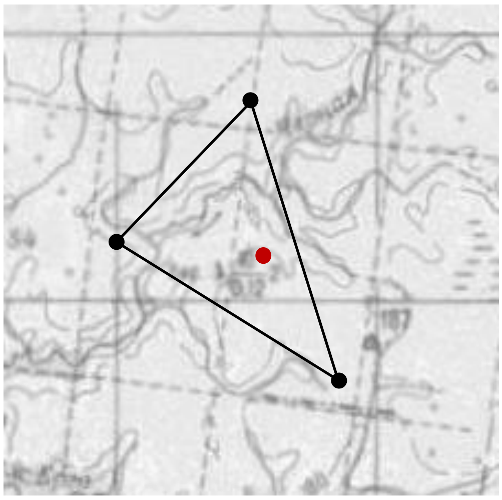
$\overrightarrow{MB}\{6-x; 3-y\}$.

Следовательно, $\begin{cases} x-1 = 2\cdot(6-x) \\ y+1 = 2\cdot(3-y) \end{cases}$; $\begin{cases} x-1 = 12-2x \\ y+1 = 6-2y \end{cases}$; $\begin{cases} 3x = 13 \\ 3y = 5 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$, то есть $M\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Пример 2. Военная разведка предоставила аналитику сведения о координатах трех пунктов дислокации вражеских подразделений – (0;2), (3;5) и (5;-1) – и информацию о том, что вражеский командный пункт равноудален от этих подразделений. Аналитику необходимо рассчитать координаты вражеского командного пункта с целью его дальнейшего уничтожения.



Представим себя аналитиком и решим эту задачу.

Из курса геометрии мы знаем, что точка, равноудаленная от трех заданных точек *A, B, C,* — это центр окружности, проходящей через эти точки, или по-другому – центр описанной около треугольника *ABC* окружности. А центр описанной окружности находится в пересечении серединных перпендикуляров.

Таким образом, для решения задачи требуется:

✓ Составить уравнения серединных перпендикуляров (достаточно двух серединных перпендикуляров, поскольку по свойству серединных перпендикуляров треугольника все трое они пересекаются в одной точке).

✓ Найти координаты точки пересечения этих серединных перпендикуляров, решив систему из их уравнений.

Решение:

Пусть *A (0;2), B (3;5), C (5; -1)*.

1) Составим уравнение серединного перпендикуляра к стороне *AB*.

Любая его точка *M (x, y)* будет равноудалена от точек *A* и *B*. Воспользуемся для составления уравнения формулой нахождения расстояния между двумя точкам:

$$\text{AM} = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

$$\text{BM} = \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$$

Так как AM = BM, получим уравнение:

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}$$

$$x^2+(y-2)^2 = (x-3)^2+(y-5)^2$$

$$x^2+y^2-4y+4 = x^2-6x+9+y^2-10y+25$$

$$-4y+10y = -6x+9+25-4$$

$$6y = -6x+30$$

$$y = -x+5$$

2) Составим уравнение серединного перпендикуляра к стороне *AC*.

Любая его точка N (x, y) будет равноудалена от точек *A* и *C*.

$$AN = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$CN = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$

Так как $AN = CN$, получим уравнение:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$

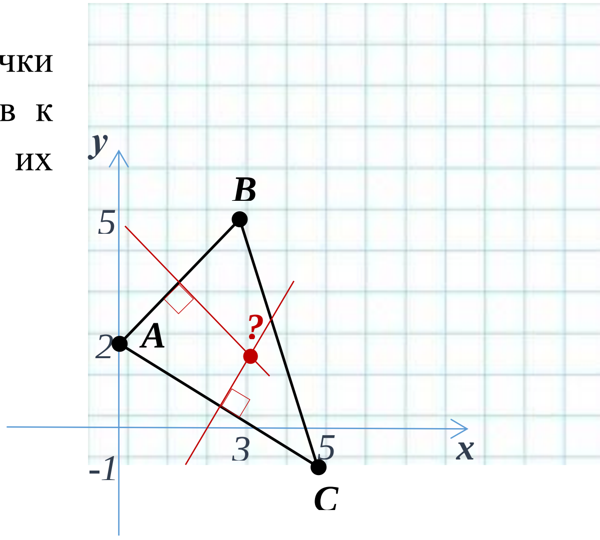
$$x^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1$$

$$-4y - 2y = -10x + 25 + 1 - 4$$

$$-6y = -10x + 22$$

$y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$



3) Найдем координаты точки пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и AC, решив систему из их уравнений:

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

$$-x + 5 = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3} \quad | \cdot 3$$

$$-3x + 15 = 5x - 11$$

$$-3x - 5x = -11 - 15$$

$$-8x = -26$$

$$x = 3{,}25$$

$$y = -x + 5 = -3{,}25 + 5 = 1{,}75$$

Ответ: (3,25; 1,75).

Систему этих же уравнений мы получим, если обозначим искомую точку *P (x; y)* и составим в координатах систему уравнений $\begin{cases} AP = BP \\ AP = CP \end{cases}$.

Пример 3. Границы зон поражения от приведения в действие двух взрывных устройств определяются линиями: $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ и $x^2 - 6x + y^2 - 7 = 0$. Изобразите на чертеже эти зоны, а также найти длину участка двойного поражения.

Решение:

Приведем данные уравнения линий к виду уравнения окружности:

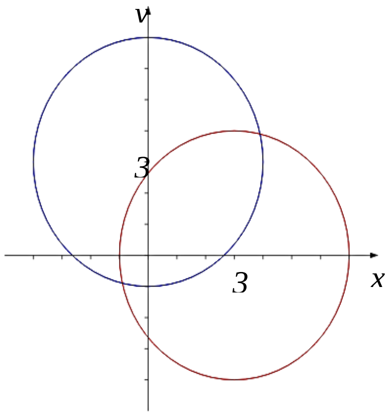
1) $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 - 16 = 0$

$x^2 + (y-3)^2 = 16$ – окружность с центром (0; 3) и радиусом 4.

2) $x^2 - 6x + y^2 - 7 = 0$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16 = 0$$



$(x-3)^2 + y^2 = 16$ – окружность с центром (3; 0) и радиусом 4.

3) Длина участка двойного поражения измеряется длиной отрезка, соединяющего точки пересечения данных окружностей. Найдем эти точки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ x^2 - 6x + y^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 6y - 7 = x^2 - 6x + y^2 - 7$$

$$-6y = -6x$$

$$y = x$$

Следовательно, $x^2 + x^2 - 6x - 7 = 0$

$$2x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 36 + 56 = 92$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{92}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Получаем точки пересечения окружностей:

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}; \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}\right).$$

Найдем расстояние между ними:

$$d = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2} = \sqrt{23 + 23} = \sqrt{46}$$

Ответ: $\sqrt{46}$.

Системы координат и угловые измерения используются в работе топогеодезических подразделений ракетных войск и артиллерии, групп самопривязки и расчетов машин, оснащенных автономной навигационной аппаратурой. При этом в военной топографии применяется, в основном, система прямоугольных координат. В топографии, применяемой в гражданской сфере, построение карт основано на применении системы географических координат земной поверхности.

При составлении военных топографических карт используется равноугольная проекция Гаусса-Крюгера. Всю земную поверхность делят меридианами на шестиградусные зоны. Плоские прямоугольные координаты определяют положение точки в пределах одной такой шестиградусной зоны. Шестиградусные зоны нумеруются арабскими цифрами, начиная от гринвичского меридиана, с запада на восток. Всего 60 зон. К примеру, 8-я зона находится между меридианами 42° и 48° восточной долготы, а 58-я зона соответственно находится между меридианами 12° и 18° западной долготы.

В каждой зоне меридиан, проходящий через центр зоны, называется осевым меридианом зоны. Линия осевого меридиана зоны перпендикулярна линии экватора. Ось абсцисс системы координат располагается вертикально и параллельно осевому меридиану зоны, а ось ординат – горизонтально и параллельно линии экватора.

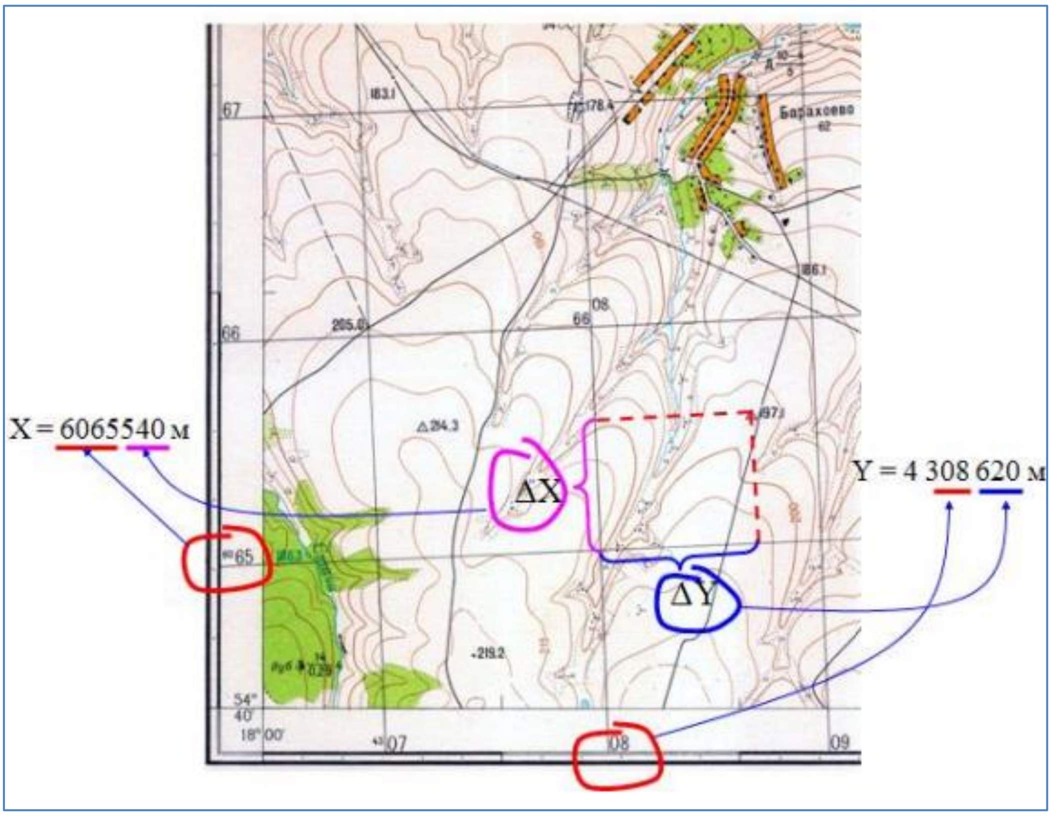
Положение точек на карте и на местности может определяться как полными, так и сокращенными прямоугольными координатами.

Полные прямоугольные координаты: координата Х (семь цифр) – удаление точки в метрах от экватора; координата У (шесть цифр) – удаление точки в метрах от вертикали, находящейся от осевого меридиана зоны на расстоянии 500 км на запад. Объекты, расположенные к западу от осевого меридиана, имеют У<500 км, а к востоку У>500 км. К значению координаты У впереди подписывается номер зоны (одна или две цифры).

Сокращенные координаты (пять цифр) определяют положение точки в пределах квадрата размером 100 км на 100 км.

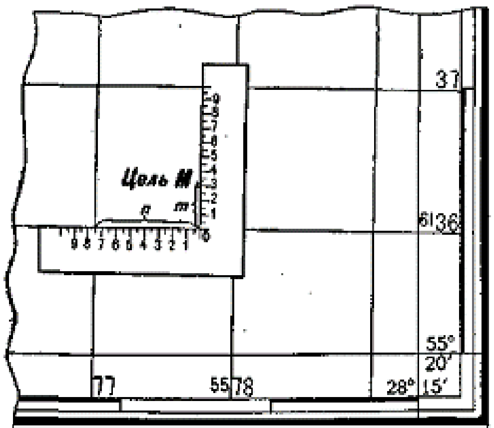
Если объект имеет полные прямоугольные координаты (6065540, 4308620), то это значит, что Х = 6065540 м – это расстояние от точки до экватора, У = 4308620, где 4 - это номер зоны в проекции Гаусса-Крюгера, а 308620 м – это расстояние от точки до вертикали, находящейся от осевого меридиана зоны на расстоянии 500 км на запад, 191380 м – это расстояние от осевого меридиана зоны до точки к западу.

Сокращенные координаты этой же точки будут (65540, 08620)



На картах большинства масштабов координатные оси изображаются через каждый километр на местности. Поэтому координатная сетка на топографической карте называется километровой и представляет собой сетку квадратов, подписанных как по оси абсцисс, так и по оси ординат. Расстояние между линиями координатной сетки зависят от масштаба карты. Любой объект легко найти на карте, если указать последние две цифры квадратов, на пересечении которых расположен объект.

Пример 4 (определение прямоугольных координат точек по карте).



Определение по карте прямоугольных координат

Если необходимо указать координаты какой-либо точки (цели), надо:

1) Записать нижнюю километровую линию квадрата, в котором находится определяемая точка (цель), т.е. **36.**

2) Измерить по масштабу в метрах расстояние (по перпендикуляру) до точки *М* от этой километровой линии, т. е. отрезок *т,* и полученную величину **330** *м.* приписывают к координате линии. Получается, абсцисса **Х = 36330 *м***.

3) Для получения ординаты У записать левую (вертикальную) сторону того же квадрата, т. е. **77.**

4) Измерить и приписать расстояние в метрах, измеренное от левой стороны квадрата по перпендикуляру до определяемой точки, т. е. отрезок *п* (**750** *м).* Получается, ордината **У = 77750 *м***.

Так как в данном примере при определении координат точки *М* цифровое обозначение километровых линий было записано не полностью, а лишь последними двумя их цифрами (36 и 77), то такие координаты являются сокращенными координатами точки *М.* В таком виде координаты обычно и записываются при определении их по карте.

Если же оцифровку километровых линий записать полностью, то получим полные координаты, как они обычно записываются в специальных списках (каталогах) координат геодезических пунктов. В нашем примере полные координаты точки *М* запишутся так: **Х=6136330*м***; **У=5577750*м***.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Из пунктов А (2; 3) и В (8; -4) одновременно навстречу друг другу выехали соответственно бронеавтомобиль «Медведь» и танк Т-90 «Владимир». Найдите координаты места встречи машин, если известно, что машины движутся равномерно по прямолинейной дороге, а скорость бронеавтомобиля в три раза больше скорости танка.

Задача 2.2. Координаты трех пунктов дислокации вражеских подразделений: (-2;1), (1;4) и (7;0). Известно, что вражеский командный пункт равноудален от этих подразделений. Найдите координаты вражеского командного пункта.

Задача 2.3. Границы зон поражения взрывами двух гранат определяются линиями: $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ и $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$. Изобразите на чертеже эти зоны, а также найдите длину участка двойного поражения.

Задача 2.4. На плане шоссе совпадает с осью Ох, а две воинские части обозначены точками А (1; 2) и В (4; 4). В каком месте шоссе надо построить автомобильную заправочную станцию, чтобы она была удалена от каждой части на одинаковое расстояние?

Задача 2.5. На плане местности прямолинейный участок железной дороги задается уравнением $y = \sqrt{3}x + 1$, а идущее параллельно шоссе – уравнением $y = \sqrt{3}x + 5$. Найдите расстояние между дорогами в соответствующих масштабу единицах.

Задача 2.6. Пункты расположения воинских подразделений находятся у подножия горы на расстоянии 10 км по прямой. Их разделяет горный перевал, на который из А и В ведут две прямолинейные дороги. Уклон дороги (тангенс угла между дорогой и линией подножия горы) из пункта А составляет 0,2, а из пункта В – 0,3. На какой высоте находится перевал? И какова длина пути из А в В через горный перевал (ответ округлите до десятых)?

Задача 2.7. Одна колонна военной техники движется по прямой дороге из пункта А (2; 3) в пункт В (11; 9). Другая колонна военной техники движется по прямой из пункта С (0; 8) в пункт D (10; 2). Определить, в какую точку необходимо отправить цистерны с топливом, чтобы можно было заправить сразу две колонны.

Задача 2.8. Противотанковая пушка с огневой позиции (0; 0) уничтожила первый танк в точке (16; 12). После этого в точке (-7; 24) появился второй танк. Определить косинус угла поворота пушки при переносе огня на второй танк.

Задача 2.9. Между пунктами А (3; 4) и В (15; 0) идет провод телефонной связи. Надо подключить к этому проводу пункт С (13; 14) по кратчайшему расстоянию. Найти точку подключение D и длину необходимого для этого провода (ответ округлите до целого).

Задача 2.10. На какое расстояние удалена точка А с координатами Х = 6885 *км*, У = 4852 *км* от точки В с координатами Х = 6852 *км*, У = 4852 *км*?

Задача 2.11. Запишите номер зоны в проекции Гаусса-Крюгера, сокращенные координаты точки. Вычислите, на каком расстоянии к востоку или западу от осевого меридиана зоны находится точка:

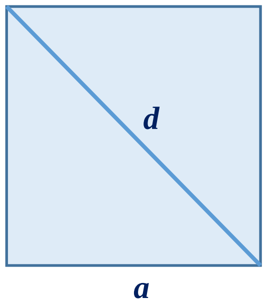
а) А (3832325, 6352683); б) В (5121420, 8621350); в) С (4835740, 22422138).

Занятие 3.

Расчеты площади в военном деле.

В разных профессиональных областях и сферах жизнедеятельности возникает необходимость в математических расчетах, в том числе в вычислении площади. В военном деле расчеты площади встречаются как при решении бытовых задач, так и боевых.

Вспомним формулы нахождения площадей плоских фигур, изученные в курсе геометрии.

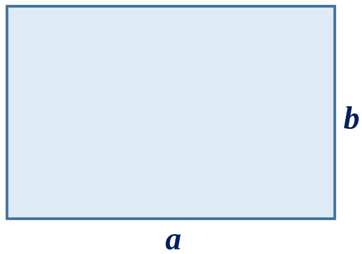


Площадь квадрата:

$S_{\text{кв.}} = a^2$

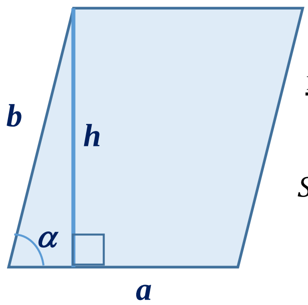
или

$S_{\text{кв.}} = \dfrac{d^2}{2}$



Площадь прямоугольника:

$S_{\text{прямоуг.}} = a \cdot b$

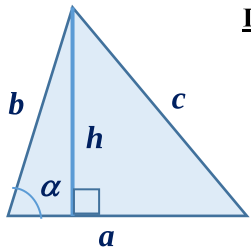


Площадь параллелограмма:

$S_{\text{парал.}} = a \cdot h$

или

$S_{\text{парал.}} = a \cdot b \cdot \sin\alpha$



Площадь треугольника:

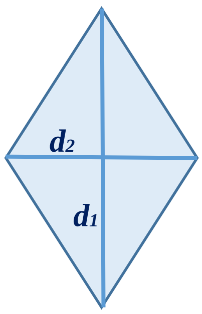
$S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h$

или

$S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

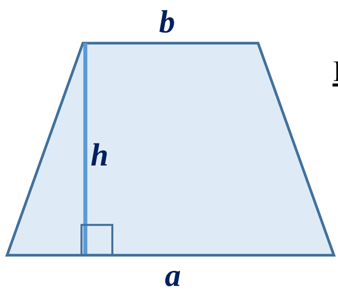
или

$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p = \dfrac{a+b+c}{2}$



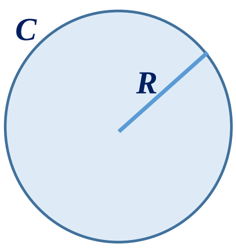
Площадь ромба:

$S_{\text{ромба}} = \dfrac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$



Площадь трапеции:

$S_{\text{трапец.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$



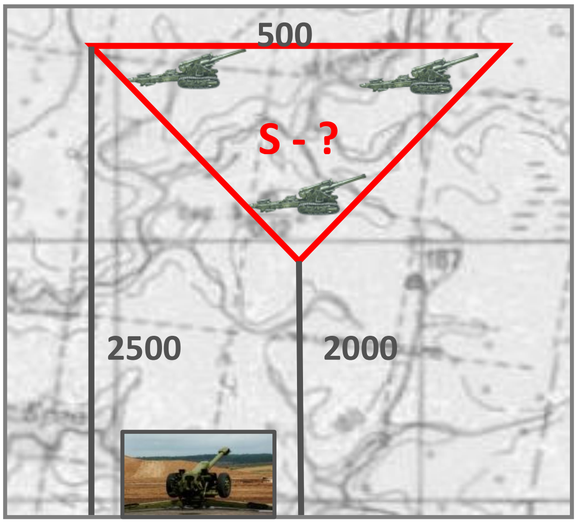
Площадь круга:

$S_{\text{круга}} = \pi \cdot R^2$

Длина окружности:

$C = 2\pi \cdot R$

Пример 1. Определить площадь участка сосредоточения трех артиллерийских орудий противника, имеющего форму треугольника, если расстояние до ближней и дальней позиций орудий 2 км и 2,5 км соответственно, а расстояние между орудиями дальней позиции – 500 м. Рассчитать количество снарядов с радиусом действия 100 м для его поражения.



Решение:

1) Площадь участка:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125(\text{км}^2)$$

2) Площадь поражения снаряда:

$$S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0314(\text{км}^2)$$

3) Количество снарядов:

$0{,}125 : 0{,}0314 \approx 4$

Ответ: 4 снаряда.

Пример 2. Для хранения боеприпасов необходимо построить арочный ангар длиной 8 м и в диаметре 6 м. Посчитайте, сколько квадратных метров профнастила для этого понадобится (ответ округлите до целого).

Решение:

Поверхность ангара образована прямоугольником, длина которого совпадает с данной длиной ангара, а ширина равна длине полуокружности данного диаметра. Передняя и задняя стенки ангара представляют собой две одинаковые половины круга данного диаметра. Найдем площади этих фигур.

1) Площадь прямоугольника: $S = 8 \cdot \pi R = 8 \cdot \pi \cdot 3 = 24\pi \approx 75{,}36$ м^2.

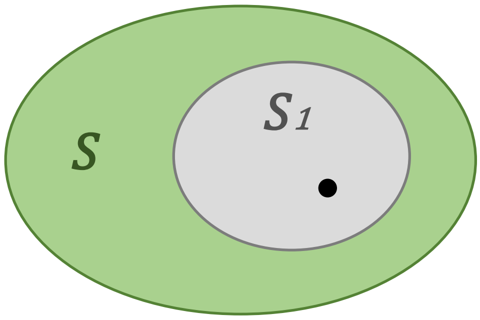
2) Площадь круга: $S = \pi R^2 = 9\pi \approx 28{,}26$ м^2.

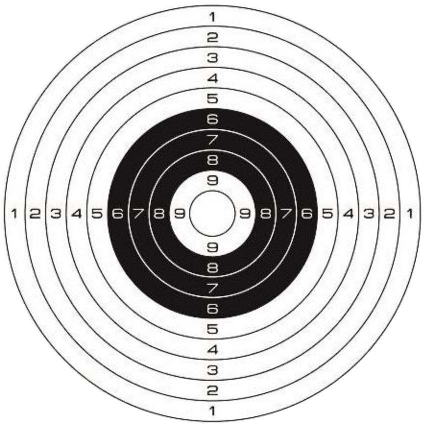
3) Обща площадь: $S \approx 75{,}36 + 28{,}26 = 103{,}62$м$^2 \approx 104$ м^2.

Ответ: 104 м^2.

Площади в теории вероятностей

С помощью площадей решаются задачи теории вероятностей о бросании точки в плоскую фигуру. Для нахождения вероятности P попадания точки в фигуру площади S_1 при её бросании в плоскую фигуру площади S ($S_1 < S$) применяется формула геометрической вероятности: $P = \frac{S_1}{S}$, где S_1 – площадь фигуры, в которую пытаются попасть «точкой», S – площадь всей фигуры. При этом учитывается, что вероятность попадания не зависит от местоположения и формы фигуры S_1 внутри S.





Пример 4. Мишень для стрельбы имеет форму круга радиусом 140 мм, образована десятью концентрическими окружностями с равными расстояниями между любыми двумя соседними окружностями (эти концентрические окружности называют габаритами мишени).

Найдите вероятность попадания в зону «8», если учесть, что при выстреле пуля всегда попадает в мишень?

Решение (I способ):

Чтобы найти неизвестную вероятность, надо площадь кольца, которым является зона «8», разделить на площадь всей мишени.

1) Заметим, что радиус самой маленькой (первой) окружности равен 140:10=14 мм. Радиус соседней с ней (второй) окружности равен 14 · 2 = 28 мм. Радиус третьей окружности равен 14 · 3 = 42 мм и так далее.

2) Найдем площадь S_1 круга, ограниченного внешней окружностью зоны «8». Его радиус равен 14 · 3 = 42 мм.

$$S_1 = \pi \cdot 42^2 = 1764\,\pi\ (\text{мм}^2).$$

3) Найдем площадь круга S_2, ограниченного внутренней окружностью зоны «8». Его радиус равен 14 · 2 = 28 мм.

$$S_2 = \pi \cdot 28^2 = 784\,\pi\ (\text{мм}^2).$$

4) $S_{\text{кольца "8"}} = S_1 - S_2 = 1764\,\pi - 784\,\pi = 980\,\pi\ (\text{мм}^2)$.

5) Найдем площадь S всей мишени:

$$S = \pi \cdot 140^2 = 19600\,\pi\ (\text{мм}^2).$$

6) Найдем неизвестную вероятность:

$$P = \frac{980\pi}{19600\pi} = 0{,}05.$$

Ответ: 0,05.

Обратим внимание, что в данном примере вероятность – это отношение площадей, и это отношение не изменится, если все радиусы концентрических окружностей одновременно увеличить или уменьшить в одно и то же число раз (например, уменьшить в 14 раз). А значит, радиус мишени на ответ не влияет, важно только условие равенства расстояний между любыми двумя соседними габаритами мишени. Таким образом, можно упростить решение примера 4, взяв за исходную мишень с радиусом 10, т.е. с расстоянием между любыми двумя соседними окружностями равным 1 (единицы длины тоже не важны).

Решение (II способ):

1) Найдем площадь S_1 круга, ограниченного внешней окружностью зоны «8». Его радиус равен 3.

$$S_1 = \pi \cdot 3^2 = 9\,\pi.$$

2) Найдем площадь круга S_2, ограниченного внутренней окружностью зоны «8». Его радиус равен 2.

$$S_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\,\pi.$$

3) $S_{\text{кольца "8"}} = S_1 - S_2 = 9\,\pi - 4\,\pi = 5\,\pi.$

4) Найдем площадь S всей мишени:

$$S = \pi \cdot 10^2 = 100\,\pi.$$

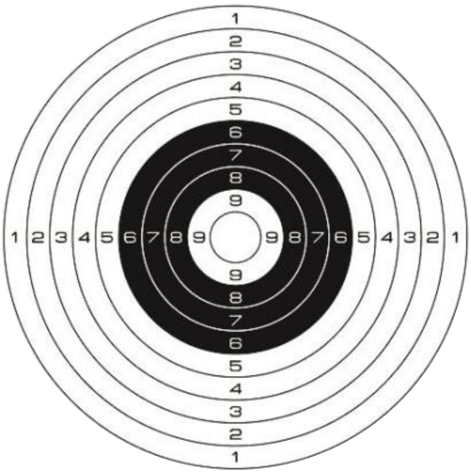
5) Найдем неизвестную вероятность:

$$P = \frac{5\pi}{100\pi} = 0{,}05.$$

Ответ: 0,05.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Командир минометной батареи получил задачу на уничтожение противника и его огневых средств в районе, ограниченном точками: A (0; 3), B (7; 6), C (9; -3). Какова площадь района обстрела?



Задача 3.2. Для хранения оружия необходимо построить арочный ангар длиной 10 м и в диаметре 8 м. Посчитайте, сколько квадратных метров профнастила для этого понадобится (ответ округлите до целого).

Задача 3.3. Мишень для стрельбы имеет форму круга радиусом 140 мм состоит из десяти концентрических кольцевых габаритов (с равными расстояниями между любыми двумя соседними габаритами). Найдите вероятность попадания в зону «4», если учесть, что при выстреле пуля всегда попадает в мишень?

Занятие 4.
Решение треугольников в военно-прикладных задачах.

Общая постановка задачи решения треугольников появилась в древнегреческой геометрии.

У треугольника общего вида имеется 6 основных характеристик: 3 линейные (длины сторон a, b, c) и 3 угловые (α, β, γ). В классической задаче на решение треугольника заданы 3 из этих 6 характеристик и нужно определить 3 остальные. Очевидно, если известны только 3 угла, однозначного решения не получится, так как любой треугольник, подобный данному, тоже будет решением, поэтому далее предполагается, что хотя бы одна из известных величин – линейная.

Алгоритм решения задачи зависит от того, какие именно характеристики треугольника считаются известными. Далее заданные величины символически обозначаются С (сторона) и У (угол). Поскольку сочетание УУУ исключено из рассмотрения, остаются 5 различных вариантов:

- три стороны (*ССС*);
- две стороны и угол между ними (*СУС*);
- две стороны и угол напротив одной из них (*УСС*);
- сторона и два прилежащих угла (*УСУ*);
- сторона, противолежащий угол и один из прилежащих (*УУС*).

Стандартным методом решения задачи является использование нескольких фундаментальных соотношений, выполняющихся для всех плоских треугольников:

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\gamma$$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной вокруг треугольника окружности:

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Также используют условия, которым удовлетворяют стороны треугольника: $a + b < c, a + c < b,\ b + c < a$ и углы $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$.

Случай «три стороны»

Пусть заданы длины всех трёх сторон a, b, c. Условие разрешимости задачи – выполнение неравенства треугольника, то есть каждая длина должна быть меньше, чем сумма двух других длин: $a<b + c$; $b<a + c$; $c<a+b$. Чтобы найти углы α, β надо воспользоваться теоремой косинусов:

$$\alpha = arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \beta = arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Третий угол сразу находится из теоремы, что сумма всех трёх углов должна быть равна 180°:

$$\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta).$$

Не рекомендуется второй угол находить по теореме синусов, потому что, при этом существует опасность спутать тупой угол с острым. Этой опасности не возникнет, если первым определить, по теореме косинусов, наибольший угол (он лежит против наибольшей из сторон). Два других угла точно являются острыми, и применение к ним теоремы синусов безопасно.

Случай «две стороны и угол между ними»

Пусть для определённости известны длины сторон a, b и угол γ между ними. Этот вариант задачи всегда имеет единственное решение. Для определения длины стороны c вновь применяется теорема косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\gamma}.$$

Фактически задача сведена к предыдущему случаю. Далее ещё раз применяется теорема косинусов для нахождения второго угла:

$$\alpha = arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Третий угол находится из теоремы о сумме углов треугольника:

$$\beta = 180^{\circ} - \alpha - \gamma.$$

Случай «две стороны и угол напротив одной из них»

В этом случае могут существовать два решения, единственное решение или вообще не быть решений. Пусть, например, известны две стороны b, c и угол β. Уравнение для угла γ находится из теоремы синусов:

$$sin\gamma = \frac{c}{b}sin\beta.$$

Для краткости обозначим $D = \frac{c}{b}sin\beta$ (правая часть уравнения). При решении уравнения возможны случаи:

1. Задача не имеет решения (сторона b «не достаёт» до линии BC) в двух случаях: если $D>1$ или если угол $\beta \geqslant 90^{\circ}$ и при этом $b \leqslant c$.

2. Если $D = 1$, существует единственное решение, причём треугольник прямоугольный, $\gamma = 90^\circ$.

3. Если $D < 1$и $b \geqslant c$, то $\beta \geqslant \gamma$ (как известно, большей стороне треугольника соответствует больший противолежащий угол). Поскольку в треугольнике не может быть двух тупых углов, тупой угол для γ исключён, и решение $\gamma = arcsinD$ единственно.

Третий угол определяется по формуле:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma.$$

Третью сторону можно найти по теореме синусов:

$$a = \frac{bsin\alpha}{sin\beta}.$$

Случай «сторона и два прилежащих к ней угла»

Пусть задана сторона c и два прилежащих к ней угла α, β. Эта задача имеет единственное решение, если сумма двух углов меньше 180°. В противном случае задача решения не имеет. Вначале определяется третий угол:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Далее обе неизвестные стороны находятся по теореме синусов:

$$a = \frac{csin\alpha}{sin\gamma};\ b = \frac{csin\beta}{sin\gamma}.$$

Случай «сторона, противолежащий угол и один из прилежащих»

Пусть известны сторона c, прилежащий угол β и противолежащий угол γ. Неизвестный угол и стороны вычисляются аналогично предыдущему случаю:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma;\ a = \frac{csin\alpha}{sin\gamma};\ b = \frac{csin\beta}{sin\gamma}.$$

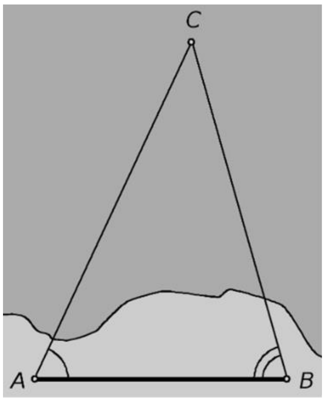
Важно:

1. Для нахождения неизвестного угла использовать теорему косинусов, а не синусов. Причина в том, что значение синуса угла при вершине треугольника не определяет однозначно самого угла. Например, если $\sin\beta = 0{,}5$, то угол β может быть, как 30°, так и 150°, потому что синусы этих углов совпадают. Исключением является случай, когда заранее известно, что в данном треугольнике тупых углов быть не может — например, если треугольник прямоугольный. С косинусом такие проблемы не возникают, в интервале от 0° до 180° значение косинуса определяет угол однозначно.

2. При построении треугольников помнить, что зеркальное отражение построенного треугольника тоже будет решением задачи. Например, три стороны однозначно определяют треугольник с точностью до отражения.

3. Все треугольники – невырожденные, то есть длина стороны не может быть нулевой, а величина угла – положительное число, меньшее, чем 180°

Пример 1. Необходимо определить расстояние от пункта A до недоступной точки C на местности, если точка B находится от пункта A на расстоянии 50 метров, $\angle A = 57^o$, $\angle B = 38^o$.



Решение:

В ΔABC, зная $\angle CAB$ и $\angle CBA$, найдём $\angle ACB$:

$$\angle ACB = 180^o - \angle CAB - \angle CBA = 180^o - 57^o - 38^o$$

$$\angle ACB = 85^o.$$

По теореме синусов вычислим AC.

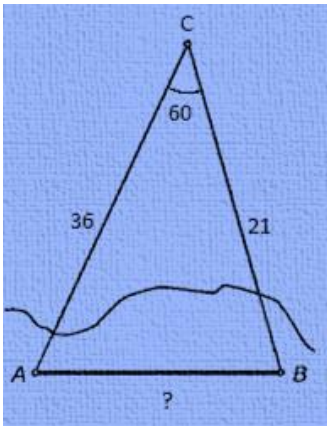
$$\frac{BC}{sin\angle A} = \frac{AC}{sin\angle B} = \frac{AB}{sin\angle C}$$

$$\frac{x}{sin38^o} = \frac{50}{sin85^o}$$

$$x = 50 \cdot 0{,}6157 : 0{,}9962 = 30{,}9024292 \approx 31 \text{ м.}$$

Ответ: расстояние от A до C – 31 м.

Пример 2. В условиях плохой видимости от берегового маяка C до первого корабля A 36 миль, до второго корабля B 21 миля, $\angle ACB = 60^o$. Вычислите расстояние между кораблями?



Решение:

В ΔABC по теореме косинусов

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$ вычислим AB:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot cos\angle ACB$

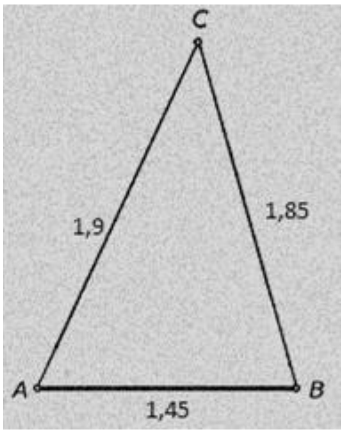
$AB^2 = 36^2 + 21^2 - 2 \cdot 36 \cdot 21 \cdot cos60^o$

$AB^2 = 1296 + 441 - 756 = 981$

$AB = \sqrt{981} = 31{,}3209195 \approx 31$ миля

Ответ: 31 миля – расстояние между кораблями.

Пример 3. Территория артиллерийского обстрела имеет форму треугольника со сторонами 1,9 км, 1,85 км, 1,45 км, в вершинах которого установили орудия стрельбы. Вычислите необходимый угол обстрела этой территории для каждого из трех орудий.



Решение:

В ΔABC по теореме косинусов

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot cos\alpha$

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot cos\beta$

Вычислим косинусы углов α и β треугольника и по таблице Брадиса найдем соответствующие им градусные меры.

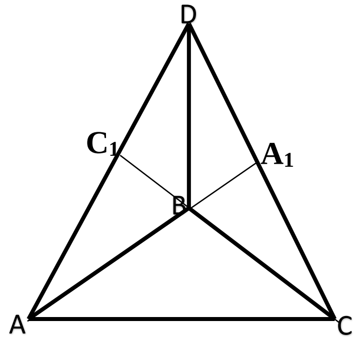
$$cos\alpha = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3{,}61 + 2{,}1025 - 3{,}4225}{5{,}51} = 0{,}4156 \Rightarrow \alpha = 65^o22'.$$

$$cos\beta = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3{,}4225 + 2{,}1025 - 3{,}61}{5{,}51} = 0{,}3475 \Rightarrow \beta = 69^o44'.$$

$\gamma\ = 180^o - \alpha - \ \beta = 180^o - 65^o22' - 69^o44'\ = 44^o54'$

Ответ: $\alpha = 65^o22', \beta = 69^o44', \gamma = 44^o54'$

Пример 4. Звено самолётов A, B, C, D двигаются к поставленной цели как показано на рисунке. Известно, что угол между ведомыми самолётами A и C и ведущим самолётом D составляет 60°, BC ⊥ AD, AB ⊥ DC и расстояние между самолётами AB = 400 м, BC = 350 м. Найдите расстояние между ведущим самолётом D и ведомым самолётом B.



Решение:

1) В $\Delta\ ADC\ \angle ADC = 60^o, BC \perp AD$.

Значит, $\angle DCB\ = 30^o,\ \ BA_1 = \frac{BC}{2} = 175$ м. $\angle ADC\ = 60^o, AB \perp CD$.

Получаем, $\angle DAB\ = 30^o, BC_1 = \frac{BA}{2} = 200$ м,

2) В четырехугольнике BC_1DA_1

$\angle BC_1D + \angle BA_1D = 180^o$. Значит, $BC_1DA_1 -$ вписанный четырёхугольник. Так как $\angle BC_1D = \angle BA_1D = 90^o$, то $BD -$ диаметр.

3) $\Delta C_1BA_1 -$ вписанный. По теореме косинусов найдём C_1A_1:

$C_1{A_1}^2 = {BC_1}^2 + {BA_1}^2 - 2 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot cos\angle C_1BA_1$

$C_1{A_1}^2 = 175^2 + 200^2 - 2 \cdot 175 \cdot 200 \cdot cos120^o$

$C_1{A_1}^2 = 30625 + 40000 - (-70000);\ \ \ C_1{A_1}^2 = 140625;\ \ \ \ C_1A_1 = 375$ м.

По теореме синусов для $\Delta C_1BA_1\ \frac{C_1A_1}{sin\angle C_1BA_1} = 2R$.

Значит, $R = \frac{375}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{375}{\sqrt{3}} = \frac{375\sqrt{3}}{3} = 125\sqrt{3}.$

Так как $BD -$ диаметр, то $BD = 250\sqrt{3} \approx 433{,}012702 \approx 433$ м.

Ответ: 433 метра расстояние между самолётом D и самолётом B.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. В условиях плохой видимости с береговых маяков K и M, расстояние межу которыми 15 морских миль обнаружен Корабль «Адмирал Чабаненко» - L. Определите расстояние от корабля до каждого маяка, если определены углы LKM и LMK 30° и 45° соответственно.

Задача 4.2. Для определения расстояния от наблюдательного пункта A до опорного пункта противника B взят пункт C. Известно, что расстояние от A до C – 72 км, отрезок BC виден из пункта A под углом 56°, отрезок AB из пункта C –

под углом 94°. Определить расстояние от наблюдательного пункта до опорного пункта противника.

Задача 4.3. Сейсмической станцией А зафиксированы сильные подземные толчки на расстоянии 64 км от станции под углом 38^0 к поверхности Земли. Определите глубину эпицентра землетрясения.

Задача 4.4. В ходе ведения разведки были установлены непроходимые участки местности. Для определения расстояния между пунктами А и В, разделенными непроходимым участком местности, построен треугольник АВС. Определить расстояние между пунктами А и В, если АС = 4,4 км, ВС = 8 км, $\angle C=135^o$.

Задача 4.5. Территория артиллерийского обстрела имеет форму треугольника со сторонами 4 км, 4,5 км, 5 км, в вершинах которого установили орудия стрельбы. Вычислите необходимый угол обстрела этой территории для каждого из трех орудий.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Ответы к задачам №1

1.1. 28.
1.2. 0,6.
1.3. 5,1.
1.4. 5.
1.5. 18.
1.6. 2.

Ответы к задачам №2

2.1. (6,5; -2,25).
2.2. (2,4; -0,4).
2.3. 2.
2.4. (4,5; 0).
2.5. 2.
2.6. 1,2 км; ≈10,3 км.
2.7. (5; 5).
2.8. 0,352.

2.9. (9; 2); ≈13. **Указание:** Составьте уравнение прямой АВ. Используя свойство угловых коэффициентов перпендикулярных прямых, составьте уравнение прямой, проходящей через точку С перпендикулярно АВ.

2.10. 33 км.

2.11. **а)** 6; (32325; 52683); 147317 м к западу; **б)** 8; (21420; 21350); 121350 м к востоку; **в)** 22; (35740; 22138); 77862 м к западу.

Ответы к задачам №3

3.1. 34,5 кв. ед.

3.2. ≈ 176 м^2.

3.3. 0,13.

Ответы к задачам №4

4.1. KL≈10,98; LM≈7,76.

4.2. AB≈143,65.

4.3. $\approx$ 39,4 км.

4.4. AB $\approx$ 33,58 км.

4.5. $\angle A=71^\circ\ 49'$, $\angle B=58^\circ\ 51'$, $\angle C=49^\circ\ 20'$.

РАЗДЕЛ 6.
10 класс
«Решение оперативно-тактических задач математическими методами»

Введение.

Программа курса для 10 класса «Решение оперативно-тактических задач математическими методами» показывает связь военной теории и практики с математикой.

В военном деле применяются многие разделы современной математики, географии и физики: геометрия, тригонометрия, теория вероятностей, топография, баллистика.

Вы узнаете, как используются теоремы и понятия в артиллерии, в прогнозировании хода боя, в разработке вариантов боевых действий и оптимизации выбора оружия и военной техники; в баллистическом движении. А также научитесь применять тригонометрические уравнения и неравенства при расчете характеристик движения снарядов, метод координат в военной топографии для артиллеристов.

Раздел программы «Решение оперативно-тактических задач математическими методами» направлено на удовлетворение познавательных потребностей и интересов старшеклассников, на формирование у них новых видов познавательной и практической деятельности, связанных с решением задач повышенного и высокого уровня сложности, получение дополнительных знаний по математике, интегрирующих усвоенные знания в систему.

Каждая тема включает в себя: краткий справочник (основные определения, формулы, теоремы и пр.), подборку практико-ориентированных задач с военной составляющей как подробным решением, так и для самостоятельного решения.

Цели данного курса: углубление и расширение знаний учащихся по изучаемым темам; на примерах решения военно-прикладных задач показать значимость математики физики и теории вероятностей в военном деле; ориентировать обучающихся к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики 10 класса; помочь овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности; развивать умение переводить различные задачи на язык математики; научить использовать знания для описания и решения задач с военной составляющей.

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	Кол-во часов	Характеристика видов деятельности обучающихся	Форма контроля
1. Расчет величин баллистического движения	1ч.	Решение задач на расчет величин, характеризующих баллистическое движение, тригонометрических функции, тригонометрические уравнения и неравенства	Самостоятельная работа
2. Математические расчеты артиллериста	1ч.	Уравнение траектории. Дальность полета снаряда и начальная скорость.	Самостоятельная работа
3. Теория вероятностей в прогнозировании хода боя	1ч.	Применение теории вероятностей в оценке боевой обстановки, прогнозировании хода боевых действий.	Самостоятельная работа
4. Классическое определение вероятностей и теоремы теории вероятностей	1ч.	События, виды событий. Определение вероятностей, теоремы вероятностей	Практическая работа
5. Итоговое занятие	1ч.	Решение оперативно-тактических задач.	Зачет
ИТОГО	5 часов		

Занятие 1.

Расчет величин баллистического движения.

Пули, снаряды, мячи при полете движутся по так называемой баллистической траектории. Её расчёт имеет практическое значение в военном деле для определения траектории снаряда, в спорте для расчёта максимальных высоты и дальности полета, для движения тел в атмосфере.

Движение снаряда – это форма движения объекта или частицы (снаряда), которая проецируется вблизи поверхности Земли и движется по кривой траектории только под действием силы тяжести (в частности, предполагается, что влияние сопротивления воздуха незначительно). Этот изогнутый путь был показан Галилеем как парабола, но он также может быть линией в особом случае, когда он брошен прямо вверх. Изучение таких движений называется баллистикой, а такая траектория-баллистической. Единственная значимая сила, которая действует на объект, – это сила тяжести, которая действует вниз, тем самым сообщая объекту ускорение вниз.

Решение задач на расчет величин, характеризующих баллистическое движение, требует знание тригонометрических функций иумение их применять, решать полученные в ходе работы тригонометрические уравнения и неравенства, уметь интерпретировать полученные расчеты к условию задачи.

Рассмотрим задачу. Тело бросают от поверхности земли, сообщив ему начальную скоростьυ_0, направленную под углом α к горизонту. Введём систему координат xOy, так как показано на рисунке 1.

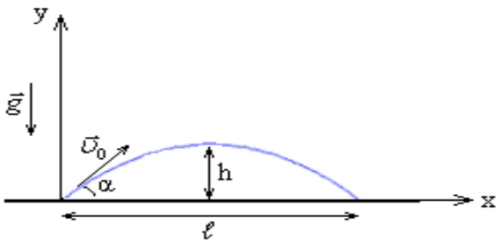


Рисунок 1

Вспомним из курса физики формулы, позволяющие найти:

1.Зависимость координат тела от времени.

Если $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ (как в нашем случае), то получаем:

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Время полёта.

$$t_{пол} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$$

3. Дальность полёта.

$$l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

4. Максимальную высоту подъёма.

$$h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

5.Уравнение траектории. Уравнение траектории — это уравнение, связывающее между собой координаты тела (материальной точки) в каждой точке траектории. $y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \dfrac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}$

Приведем примеры решения задач на применение выше представленных формул.

Задача 1. Снаряд выпускают под углом к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта снаряда (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3 секунды, если снаряд летит с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $t(\alpha) = 3$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} = 3 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

Задача 2. Гранату бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли.

Максимальная высота полёта гранаты, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость гранаты, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2).

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) граната пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $H \geq 5$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20\ \text{м/с}$ и ускорения свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$:

$$\frac{20^2}{40}(1 - \cos 2\alpha) \geq 5 \Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha \leq \frac{1}{2} \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 60^\circ \leq 2\alpha < 180^\circ \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

Задача 3. Гранату бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает граната, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость гранаты, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) граната перелетит реку шириной 20 м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0^\circ;\ \ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20\ \text{м/с}$ и ускорения свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30^\circ + 360^\circ n \le 2\alpha \le 150^\circ + 360^\circ n \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \le 2\alpha \le 150^\circ \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 15^\circ \le \alpha \le 75^\circ.$$

Ответ: 15.

Задача 4. Сложная задача про снаряд и цель.

Особенность этой задачи состоит в том, что кроме дальности полета снаряда и начальной скорости больше никаких данных нет. Однако, если обладать достаточной смекалкой, можно решить и такую задачу. Также здесь потребуются знания по решению биквадратных уравнений.

Задача. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. За какое время снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели?

Решение. В этой задаче ничего не сказано про угол, под которым произведен выстрел. То есть снаряд может лететь по любой траектории (Рис. 2).

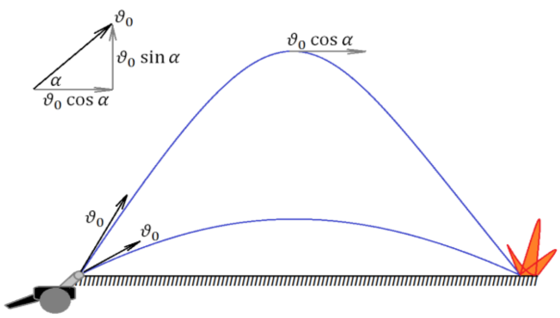


Рисунок 2

Начальную скорость снаряда можно разложить по осям: $v_{vert} = v_0 \sin\alpha$ – по вертикальной оси и $v_{gor} = v_0 \cos\alpha$ – по горизонтальной. Снаряд достигнет высшей точки траектории, и в этот момент вертикальная составляющая скорости станет равной 0:

$$v_{vert} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

Отсюда найдем $\sin\alpha = \frac{gt}{v_0}$.

Здесь t – только половина времени полета, потому что, чтобы снова вернуться на уровень земли, снаряд потратит ровно столько же времени, как и туда, поэтому полное время полета равно

$$t_{poln} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Все это время снаряд двигался по горизонтали равномерно, с постоянной скоростью, равной горизонтальной составляющей $v_0 \cos\alpha$, и в итоге одолел 5,1км до цели:

$$v_0 \cos\alpha \cdot t_{poln} = S$$

Отсюда найдем $\cos\alpha = \frac{S}{v_0 \cdot 2t}$.

Теперь составим основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{g^2t^2}{v_0^2} + \frac{S^2}{v_0^2 \cdot 4t^2} = 1$$

Осталось решить это биквадратное уравнение.

$$\frac{100t^2}{240^2} + \frac{5100^2}{240^2 \cdot 4t^2} = 1$$

Домножаем на t^2:

$$\frac{100t^4}{240^2} - t^2 + \frac{5100^2}{240^2 \cdot 4} = 0$$

$$0,00174t^4 - t^2 + 112,9 = 0$$

$$0,00174a^2 - a + 112,9 = 0$$

Определяем дискриминант: $D = 1 - 4 \cdot 0,00174 \cdot 112,9 = 0,216$

Корни: $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{0,216}}{2 \cdot 0,00174} = \frac{1 \pm 0,465}{0,00348}$

$$a_1 = 421$$

$$a_2 = 154$$

Тогда определим время:

$$t_1 = \sqrt{a_1} = \sqrt{421} = 20,52$$

$$t_2 = \sqrt{a_2} = \sqrt{154} = 12,4$$

Не забудем, что за t мы обозначили только время полета до наивысшей точки, поэтому полное время полета до цели вдвое больше: или 41,1с, или 24,8с.

Таким образом, в зависимости от угла, снаряд может лететь 24,8с или 41,1с.

Ответ: 24,8с или 41,1с.

Задача 5. Пуля вылетает в горизонтальном направлении и летит со средней скоростью 800 м/с. На сколько снизится пуля в отвесном направлении во время полета, если расстояние до цели 600 м?

Решение:

За начало отсчета координат примем точку, откуда вылетает пуля, а за начало отсчета времени -момент сбрасывания. Ось X направим горизонтально, а ось Y- вертикально вверх.

Движение пули описывается уравнениями:

$x = V_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ (1)

$y = V_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}$ (2)

Через время t пуля преодолеет расстояние 1. Из уравнения (1) вычислим время

$$t = \frac{1}{V_0 \cdot \cos\alpha}.$$

Откуда

$$t=\frac{600м}{800м/с\cdot\cos 0^\circ}=0{,}75с.$$

Подставив время t в уравнение (2), получим расстояние, на которое снизится пуля в отвесном направлении достигнув цели:

$$h= 800м/с\cdot\sin 0^\circ\cdot 0{,}75\ с-\frac{9{,}8\ {}^{м}\!/_{с^2}\,(0{,}75с)^2}{2}\approx 2{,}8м.$$

Ответ: h≈2,8 м.

Задача 6. Окоп противника на расстоянии 1 км виден под углом 0,017 артиллерийских единиц. Какова его длина?

Справка. В артиллерии для измерения углов используется своя система. Круг делится на 60 артиллерийских единиц (а.е.), т.е. 360° = 60 а.е., 6° = 1 а.е.; 0,01 а.е. называется малой единицей. Поэтому угол обозначается так: 3-10 (3 большие единицы и 10 малых). Эту величину легко перевести в градусы: 3,10 • 6°=18.6°

Решение.

Считая расстояние 1000м и длину окопа l катетами прямоугольного треугольника, получим: l= 1000 • tgα, где α = 0,017 а.е. = 0,017 • 6° = 0,1° = 6', tg 6' = 0,017. Тогда 1 = 17 м. В нашем примере тангенс угла (0,017) совпал со значением угла в артиллерийских единицах (0,017). Это не случайность. Именно по этому принципу и выбраны единицы измерения углов в артиллерии.

Правило. При малых углах линейные размеры (в метрах) предмета, находящегося на расстоянии 1 км, численно равны значению угла зрения (в тысячных). Понятно, что если α - угловой размер предмета в тысячных, а расстояние до него км, то линейный размер равен $l = k\alpha$.

С другой стороны, если линейные размеры предмета точно известны (габариты танка, машины, высота телеграфного столба и т.д.), то легко найти расстояние до него: k =l/ α.

Вот какими свойствами обладают артиллерийские единицы измерения углов, поэтому во время Великой Отечественной войны кадровые офицеры-артиллеристы делали насечки на козырьке фуражки, соответствующие тысячным артиллерийской единицы. Тогда можно грубо оценить угол без всякого измерительного прибора или узнать расстояние до предмета, если его размеры известны.

Задача 7. Деталью некоторого военного прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н.м) определяется формулой $M = NIBl^2\sin\alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3\cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент М был не меньше 0,75 Н.м?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $NIBl^2 \sin\alpha \geq 0,75$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях силы тока в рамке $I = 2$ А, размера рамки $l = 0,5$ м, числа витков провода $N = 1000$ и индукции магнитного поля $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл:

$$1000 \cdot 2 \cdot 0,5^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \sin\alpha \geq 0,75 \Leftrightarrow \sin\alpha \geq 0,5 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

Задача 8. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120^\circ$/с, фаза $\varphi = -30^\circ$. Датчик настроен так, что, если напряжение в нём не ниже, чем 1В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $U_0 \sin(\omega t + \varphi) \geq 1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

$$2\sin(120^\circ t - 30^\circ) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(120^\circ t - 30^\circ) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 120^\circ t - 30^\circ \geq 30^\circ + 360^\circ n, \\ 120^\circ t - 30^\circ \leq 150^\circ + 360^\circ n, \end{cases} n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 120^\circ t \geq 60^\circ + 360^\circ n, \\ 120^\circ t \leq 180^\circ + 360^\circ n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t \geq 1 + 6n, \\ 2t \leq 3 + 6n \end{cases} \Leftrightarrow 3n + \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} + 3n \underset{0\leq t\leq 1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$ с, то есть 50% времени.

Ответ: 50.

Задача 9. Военный катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м и со скоростью течения $u = 0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u}\text{ctg}\alpha$, где α – острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200с?

Решение.

Задача сводится к решению неравенства $\frac{L}{u}\mathrm{ctg}\alpha \leq 200$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях длины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5}\mathrm{ctg}\alpha \leq 200 \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\alpha \leq 1 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

Задачи для самостоятельного решения на «Расчет величин баллистического движения»

1. Уравнение траектории полета снаряда в безвоздушном пространстве имеет вид $y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. При каком значении x, снаряд достигает максимальной высоты. Вычислить наибольшую высоту полета снаряда, если $\alpha = 45^0$, v_0 = 400 м/с.

2. На какую высоту над полигоном поднимется сигнальная ракета, выпущенная командиром означающая начало учебных действий, если ракетница была направлена под углом 60° к горизонту, а скорость вылета ракеты 40 м/с?

Ответ: 60 м.

3. Боец на учении метнул учебную гранату под углом 45° к горизонту. Наибольшая высота, которой достиг учебный снаряд, 10 м. На какое расстояние удалось метнуть гранату бойцу?

Ответ: 40 м.

4. Дальность полёта бомбы, сброшенной с горизонтально летевшего со скоростью 150 м/с самолёта, оказалась равной высоте полёта. Определите, с какой высоты сбросили бомбу.

Ответ: 4500 м.

5. Первый самолёт летит горизонтально со скоростью 800 км/ч на высоте вдвое большей, чем второй. С какой скоростью должен лететь второй самолёт, чтобы дальность полёта бомб, сброшенных с каждого самолёта, оказалась одинаковой?

Ответ: 1130 км/ч.

6. Бронетранспортер тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа бронетранспортера (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Ответ: 60

7. Военный катер должен пересечь реку шириной $L = 36$ м и со скоростью течения $u = 0{,}5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \dfrac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 72 с?

Ответ: 45

8. Деталью некоторого военного прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н.м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 3\text{А}$ — сила тока в рамке, $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}5$ м — размер рамки, $N = 600$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент М был не меньше 0,9 Н.м?

Ответ: 30

Занятие 2.
Математические расчеты артиллериста.

Многие задачи, связанные с управлением стрельбой, в настоящее время решаются компьютерами и различной вычислительной техникой. Однако прежней остается их математическая сущность. Рассмотрим на примере связи артиллерии и математики.

Стрельбе артиллерийской батареи по объектам предшествует подготовка данных – определение дальности и направления стрельбы. Чтобы найти эти величины, нужно определить их топографические координаты.

Топографическая карта – крупномасштабная географическая карта. На листах такой карты изображаются относительно небольшие участки земной поверхности, поэтому кривизна Земли не учитывается.

Основной топографической картой является карта масштаба 1:1000000. Листы такой карты представляют собой равнобокие трапеции, которые получаются так: сначала земную поверхность покрывают параллелями через каждые 4^0 от экватора к полюсам – получают ряды. Затем поверхность Земли покрывают меридианами через каждые 6^0 от меридиана, противоположного гринвичскому, в восточном направлении – получают колонки. Пересекаясь, ряды и колонки образуют трапеции, которые и изображают на листах миллионной топографической карты.

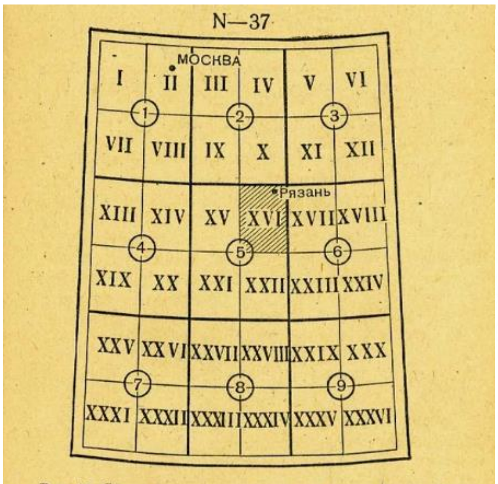
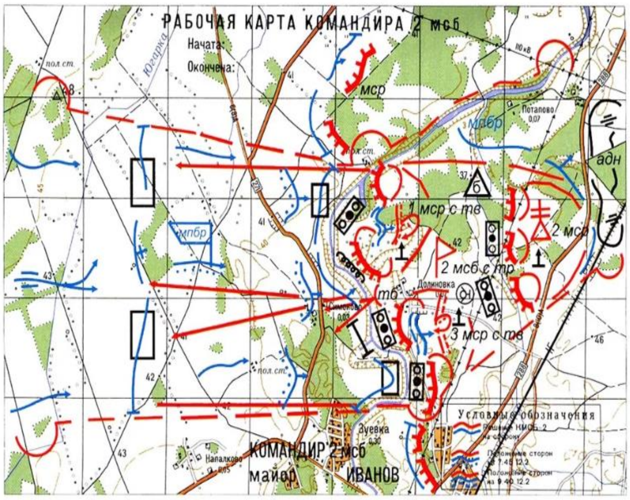
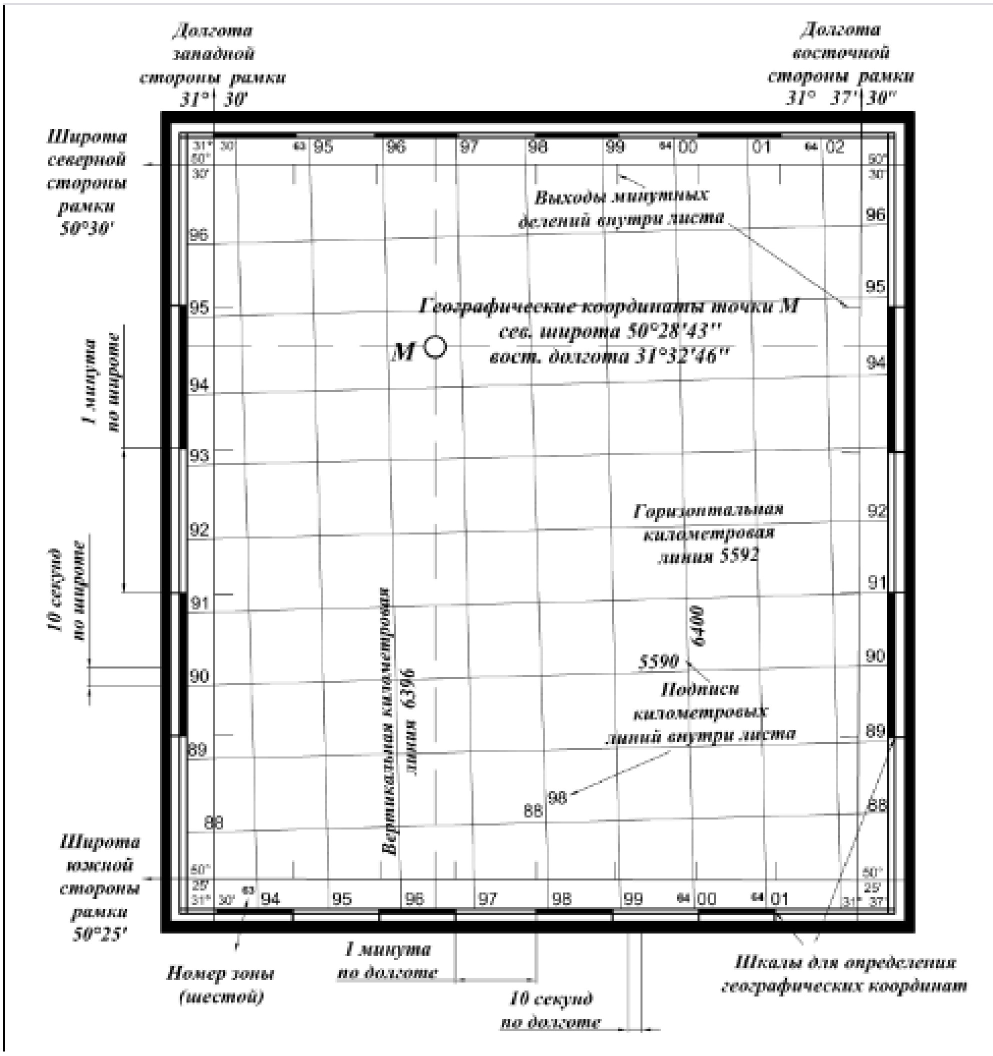


Рис. 42. Схема расположения листов карты масштаба 1:200000 на листе карты масштаба 1:1000000



Система координат, употребляемая в топографии, отлична от декартовой. В этой системе за ось X принят серединный географический меридиан каждой колонки, параллельно снесенный на 500 км к западу, а за ось Y принят экватор. В этой системе координат каждая точка имеет координаты – они называются топографическими координатами, и измеряются в метрах.



К примеру, координаты условной точки М (смотреть на иллюстрации) с координатами 50°28'43" с.ш. и 31°32'46" в. д. находятся в 6-й зоне (между 30° и 36° восточной долготы), приблизительно севернее на 500 метров и восточнее на 700 метров от пересечения горизонтальной километровой линии 5594 (севернее экватора на 5594 километра) и вертикальной километровой линии 6396 (восточнее начала отсчёта ординат 6-й зоны на 396 километров по экватору). Соответственно запись в прямоугольных координатах условной точки М будет следующей: x=5594500 и y=6396700.

Каждый умеет пользоваться компасом. Поэтому можно считать, что мы умеем сориентировать нужную то по карту по направлению на север.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

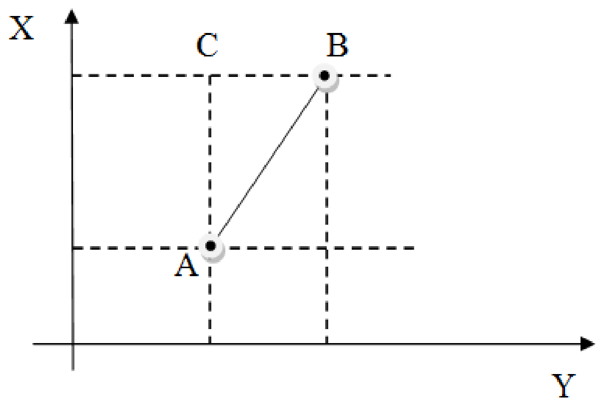
X_A и Y_A – топографические координаты пункта А на местности; $|AB|$ – расстояние между пунктами А и В (в метрах); $[AB]$ – азимут направления из А на В, т.е. угол между лучом АВ и направлением на север, отсчитываемый по часовой стрелке.

Рассмотрим задачи, которые приходится решать в процессе подготовки исходных данных для стрельбы.

Задача 1.

Дано: X_A, Y_A, $|AB|$, $[AB]$.

Найти: X_B, Y_B



В задаче имеется в виду, что расстояние $|AB|$ (в метрах) найдено при помощи мерной ленты, угол $[AB]$ – при помощи буссоли или теодолита.

Из рисунка находим $X_B=X_A+\Delta X$ и $Y_B=Y_A+\Delta Y$, где $\Delta X=|AB|\cdot cos[AB]$ и $\Delta Y=|AB|\cdot sin[AB]$.

Эта задача позволяет «привязать» пункт В местности (определить топографические координаты точки В) по «привязанной» точке А.

Задачи для самостоятельного решения к теме «Математические расчеты артиллериста»

Найти: X_B, Y_B, если $X_A=53817$, $Y_A=38629$, $|AB| = 2182$, $[AB]=321°14'$.

Задача 2.

Дано: X_A, Y_A, X_B, Y_B

Найти: |AB|, [AB].

По предыдущему рисунку находим $\Delta X = X_B - X_A$ и $\Delta Y = Y_B - Y_A$.

Тогда, $tg[AB] = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$. По вычисленной величине $tg[AB]$ с учетом знака находим угол [AB]. Затем из ΔABC получим

$|AB| = \frac{|\Delta Y|}{sin[AB]} = \frac{|\Delta X|}{cos[AB]}$.

Вычисление |AB| проводится по обеим формулам. Совпадение результатов – некоторая гарантия безошибочности произведенных подсчетов.

Решите самостоятельно:

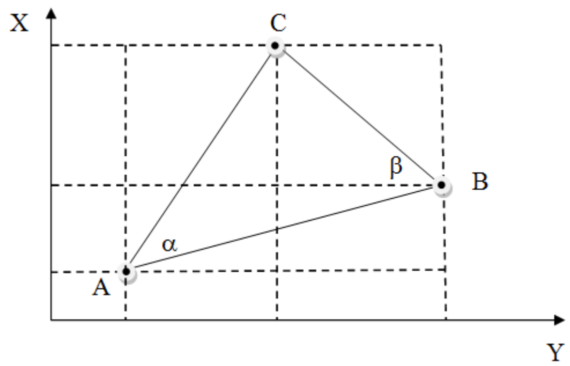
Найти |AB|, [AB], если X_A=12850, Y_A=98713, X_B=13519, Y_B=97314.

Решив задачу, вы сможете подать на батарею команду: "Батарея, к бою! Дальность..., азимут...!" Наводчик каждого орудия батареи, получив такую команду, при помощи прицельного приспособления нужным образом наведет свое орудие по вертикали (одно деление прицела - 50 м) и по горизонтали (одно деление угломера 3,6′).

В рассмотренных задачах не учтено то, что пункты A и B необходимо предварительно "привязать". В условиях войны пункт A находится на нашей территории, а пункт B на территории противника: туда с мерной лентой не пройдешь. Отсюда возникает новая задача.

Задача 3.

Пусть A и B – пара наблюдательных пунктов, расположенных на расстоянии 1,5-2,5 км друг от друга, недалеко от переднего края обороны. Эти пункты заранее «привязаны», с них ведется наблюдение за противником. При появлении в лагере противника цели C наблюдатели ее «засекают», т.е. любым способом измеряют углы α и β.



Остается только решить треугольник ABC по стороне AB и двум прилежащим к ней углам α и β.

Дано: X_A, Y_A, X_B, Y_B, углы α и β.

Найти: X_C, Y_C.

Если знать величины [AC] и |AC|, или [BC] и |BC|, то задача сведется к задаче 1.

Для ΔABC по теореме синусов имеем

$$\frac{|AC|}{sin\beta} = \frac{|BC|}{sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)},$$

отсюда $|AC| = \frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot sin\beta$ и $|BC| = \frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot sin\alpha$.

Кроме того, $[AC] = [AB] - \alpha$ и $[BC] = [AB] + \beta$.

Величины $|AB|$ и [AB] находятся так же, как в задаче 2.

Решите самостоятельно:

Найти X_C, Y_C, если X_A=12850, Y_A=98713, X_B=13519, Y_B=97314, α=39°43′, β=82°25′.

Занятие 3.
Теория вероятностей в прогнозировании хода боя.

При исследовании закономерностей вооруженной борьбы важную роль играет математика. Основные задачи, в решении которых применяются математические методы: управление силами и оружием; прогнозирование хода боя; разработка вариантов боевых действий; оптимизация выбора оружия и военной техники и пр.

Поступление на вооружение новых мощных средств борьбы, непрерывный рост технической оснащенности войск ставят на первое место борьбу за выигрыш времени. При подготовке и в ходе боевых действий штабы проводят фактические расчеты, способствующие детальной оценке обстановки. В современном бое участвуют разнородные войска с высокой маневренностью, динамичностью. Это означает, увеличение объема информации, необходимой для управления войсками и сокращению времени обработки. Следовательно, чтобы своевременно обрабатывать большие информационные потоки, войсковые средства автоматизации должны обладать высокой производительностью. В то же время, они должны быть приспособлены к работе в экстремальных условиях, в сложной радиоэлектронной обстановке, отличаться высокой напряженностью.

Рассмотрим применение теории вероятностей в оценке боевой обстановки, прогнозировании хода боевых действий.

Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Все события делятся на три группы: достоверные, случайные, невозможные. Достоверным называется событие U, которое в результате опыта непременно должно произойти. Невозможным называется событие V, которое в результате опыта не может произойти.

Вероятность — степень (относительная мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.

Вероятность события А обозначается P(A), P или p.

Вероятность достоверного события P(U) = 1. Вероятность невозможного событияV,P(V) = 0.Вероятность любого случайного события А заключена между нулем и единицей:0 <P(A) < 1.Случай называется благоприятным событию, если это появление случая влечет за собой и появление события. Если вероятность наступления события равна p, то вероятность его не наступления равна 1 -p. В частности, вероятность 1/2 означает равную вероятность наступления и не наступления события. Условной вероятностью события А при наличии В называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Эта вероятность обозначается P(A / B).

Случайные события также делятся на независимые и зависимые события. **Независимыми событиями** называют события если, условная вероятность каждого из них равна безусловной вероятности, то есть если P(A/B) = P(A), где P- вероятность события, А – одно событие, В – другое событие, – обозначает условную вероятность. **Зависимыми событиями** называют события, если условная вероятность каждого из них не равна безусловной вероятности, то есть если P(A/B) ≠ P(A). Пример: из урны с тремя белыми и семью черными шарами последовательно извлекают два шара. Если первый вынутый шар не возвращается в урну, то события В и В1 зависимые; в случае возвращения в урну первого вынутого шара события В и В1 будут независимыми. Смысл независимости случайных событий заключается в том, что вероятность появления одного события не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. Независимые события являются результатом не связанных между собой испытаний. А для зависимых событий вероятность появления одного события зависит от того, произошло или не произошло другое событие. Часто вероятность оценивается на качественном уровне, в тех случаях, когда точная количественная оценка невозможна или затруднительна.

Задача 1. Являются ли несовместными следующие события:

а) Производится два выстрела по мишени; события: C_0 – ни одного попадания; C_1 – одно попадание; C_2 – два попадания;

б) Производится два выстрела по мишени; события: D_1 – хотя бы одно попадание; D_2 – хотя бы один промах.

Ответ: а) да, б) нет.

Задача 2. Являются ли равновозможными следующие события:

Производится выстрел по мишени; события: C_1 – попадание; C_2 – промах?

Ответ: общем случае нет.

Задача 3. Являются ли случаями следующие группы событий:

а) Производится выстрел по мишени; события: D_1 — попадание; D_2— промах; б) Производится два выстрела по мишени; события:A_0 — ни одного попадания; A_1— одно попадание; A_2— два попадания?

Ответ: а) нет; б) нет.

Занятие 4.
Классическое определение вероятностей.

Классическое определение вероятностей основано на понятии равновозможности исходов. В качестве вероятности выступает отношение количества благоприятных событию исходов, к числу всех возможных исходов.

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}}$$

Рассмотрим определения, необходимые при решении задач.

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из событий *A* или *B*. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном появлении события *A* и события *B*. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Задача 4. В барабане револьвера семь гнезд. В пяти гнёздах заложены патроны, а два гнезда оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. На спусковой крючок нажимают дважды. Найти вероятность р того, что, что оба раза револьвер не выстрелит.

Решение. Так как любое гнездо (одно из 7) при первом выстреле может сочетаться с любым гнездом (одним из 7) при втором, число всех возможных случаев *n*= 7 7 = 49. Число благоприятных исходов *m* равно числу комбинаций пустых гнезд: *m* =2 2 = 4. Вероятность того, что оба раза револьвер не выстрелит равна: р = $\frac{m}{n} = \frac{4}{49}$.

Ответ: $\frac{4}{49}$.

Задача 5. Батарея из K орудий ведет огонь по группе, состоящей из L целей (K<L). Орудия, случайным образом, выбирают последовательно себе цели, так что никакие два орудия не стреляют по одной цели. Найти вероятность р того, что будут обстреляны цели с номерами 1, 2, ... , K.

Решение. Число способов, которыми можно распределить К орудий по Lцелям, равно $n= L\ (L - 1)\ (L - K + 1)$ (полученное выражение означает число размещений из L элементов по K, т.е. $A_L^K = \frac{L!}{(L-K)!}$). Число благоприятных исходов (при которых обстреливаются только первые Kцелей) $m = K!;$ а значит вероятность того, что будут обстреляны цели с номерами 1, 2,..., K, равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{K!}{L\,(L-1)...(\,L-K+1)}\ .$$

Задачи для самостоятельного решения к теме классическое определение вероятностей

Задача 6. Батарея, состоящая из К орудий, ведет огонь по группе, состоящей из L самолетов (K≤L). Каждое орудие случайно и независимо от других выбирает себе цель. Найти вероятность того, что все К орудий будут стрелять по одной и той же цели.

Задача 7. Решите задачу №5 при условии, что 5 орудий батареи ведут огонь по 12 целям противника.

Задача 8. Батарея, состоящая из К орудий, ведет огонь по группе, состоящей из L самолетов (K≤L). Каждое орудие случайно и независимо от других выбирает себе цель. Найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по разным целям.

Задача 9. Решите предыдущую задачу при условии, что 3 орудия обстреливают 5 самолетов.

Задача 10. В барабане револьвера семь гнезд. В пяти гнёздах заложены патроны, а два гнезда оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. На спусковой крючок нажимают дважды. Найти вероятность р того, что, что оба раза выстрел произойдет.

Решения и ответы к задачам по теме классическое определение вероятностей

Задача 6. Решение: $p = \frac{m}{n} = \frac{L}{L^K} = \frac{1}{L^{K-1}}$.Ответ: $\frac{1}{L^{K-1}}$.

Задача 7. Ответ.$\frac{1}{12^4}$

Задача 8. Решение. К обстрелянных целей из Lможно выбрать C_L^Kспособами, а орудия, стреляющие по целям, можно распределить К! способами, поэтому число благоприятных исходов равно $m = C_L^K \cdot K!;$ общее число случаев $n = L^K$; искомая вероятность того, что все орудия будут стрелять по разным целям, равна $p = \frac{m}{n} = \frac{C_L^K \cdot K!}{L^K}$, $т.к. C_L^K = \frac{L!}{K!(L-K)!}$, то получим $p = \frac{m}{n} = \frac{\frac{L!}{K!(L-K)!} \cdot K!}{L^K}$

$p = \frac{(L-1)(L-2)...(L-K+1)}{L^{K-1}}$.

Ответ: $\frac{(L-1)(L-2)...(L-K+1)}{L^{K-1}}$.

Задача 9. *Ответ*: $\frac{12}{25}$

Задача 10. Решение. По-прежнему, число всех возможных случаев $n = 49$. Число благоприятных случаев $m = 5 \cdot 4 = 20$, так как при первом выстреле гнездо с патроном можно выбрать пятью способами, а при втором выстреле — четырьмя (один выстрел уже произведен); а значит, что вероятность того, что, что оба раза выстрел произойдет равна: р = $\frac{m}{n} = \frac{20}{49}$.

Ответ: $\frac{20}{49}$.

Теоремы теории вероятностей

Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте; в противном случае события называются совместными.

I. Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий. **Р(А+В) = Р(А) + Р(В)**

Вероятность суммы двух совместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий. **Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ),** где АВ–произведение событий А и В.

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Событие А называется противоположным событию $\overline{A}$, если оно состоит в непоявлении события А. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. События А и В называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий **Р(А/В) = Р(А); Р(В/А) = Р(В).**

II. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого: Р(АВ) = Р(А)Р(В/А) или Р(АВ) = Р(В)Р(А/В). Для независимых событий Аи В вероятность Р(АВ) = Р(А) Р(В).

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий:

$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) P(A_n / A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1})$

Если события независимы, т.е. появление любого числа независимых событий не меняет вероятностей появления остальных.

Задача 11. Может ли сумма двух событий А и В совпадать с их произведением?

Решение. Да, может, если события эквивалентны (равнозначны), т.е. если из события А вытекает В и, наоборот, из В вытекает А. Например, пусть производится один выстрел по мишени. Предположим, что попадание в мишень непременно приводит к ее разрушению и никаким другим способом мишень разрушена быть не может. Тогда два события: А — попадание в мишень, В — разрушение мишени — эквивалентны (А = В) и для них:

$$A + B = A = B;\ AB = A = B.$$

Задача 12. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех подводных лодок. Каждая из них за время наблюдения может быть обнаружена или не обнаружена. Рассматриваются события: А — обнаружена ровно одна из четырех подводных лодок; В — обнаружена хотя бы одна лодка; С — обнаружено не менее двух подводных лодок; D — обнаружены ровно две лодки; Е — обнаружено ровно три подводные лодки; F — обнаружены все четыре объекта.

Указать, в чем состоят события: 1)А + В; 2) АВ; 3) В + С; 4) ВС; 5) D + Е - F; 6) BF. Совпадают ли события BF и CF? Совпадают ли события ВС и D?

Ответ: 1)А + В=В; 2) АВ = А; 3) В + С= В; 4)ВС=С; 5)D + Е + F=С;6)BF = F. BF и CF совпадают; ВС и D не совпадают.

Задача 13. Ведется стрельба по самолету противника, уязвимыми частями которого являются кабина пилота и два двигателя. Для того, чтобы уничтожить самолет, достаточно поразить кабину пилота или оба двигателя вместе. Вероятность поражения кабины пилота p_1=0,25, первого двигателя p_2=0,3, второго двигателя p_3=0,4. Части самолета поражаются независимо друг от друга.

Найти вероятность того, что самолет будет уничтожен.

Решение. Событие - уничтожение самолета – сумма двух совместных событий, одно из которых поражение кабины, а второе – поражение обоих двигателей.

Обозначим событие уничтожение самолета – А, поражение кабины пилота – В, С – поражение обоих двигателей. Т.к. события В и С совместны, то

$P(A) = P(B) + P(C) - P(BC) = 0{,}25 + 0{,}3\cdot 0{,}4 - 0{,}25\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}25+0{,}12-0{,}03=0{,}34$

Ответ: 0,34

Задача 14. Радиолокационная станция обнаруживает космический объект с вероятностью *p.* Обнаружение объекта РЛС происходит в каждом сеансе ее работы независимо от других. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен при 3 сеансах работы РЛС.

Решение. Обнаружение и не обнаружение РЛС космического объекта события обозначим А и $\overline{A}$. А и $\overline{A}$ противоположные, сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Поэтому, вероятность не обнаружения РЛС за один сеанс равна 1 - *p*, а при 3 сеансах - $(1 - p)^3$. Значит вероятность того, что объект будет обнаружен при *3* сеансах работы РЛС равна $P(A) = 1 - (1 - p)^3$

Ответ: $1 - (1 - p)^3$.

Итоговое занятие.

Зачет.

Задача 1. Радиолокационная станция обнаруживает группу из 7 космических объектов, каждый из которых, независимо от других, с вероятностью *p.* За этой группой объектов независимо друг от друга ведут 5радиолокационных станций. Найдите вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

Задача 2. Две радиолокационные станции ведут наблюдение за некоторой областью пространства, в которой в течение времени t, перемещается самолет разведчик. За это время первая станция успевает провести 10сеансов работы, в вторая - 20 сеансов. За один сеанс обзора первой РЛС самолет обнаруживается (независимо от других) с вероятностью p_1, второй с вероятностью - p_2. Вычислите вероятности следующих событий:

А – самолет обнаружен за время t хотя бы одной из РЛС,

В – самолет обнаружен за время t первой РС и не обнаружен второй РЛС,

С – самолет не обнаружен за первую половину времени, но обнаружен за вторую.

Задача 3. Сообщение, состоящее из 32символов, передается по одному из каналов связи. При передаче каждый символ искажается, независимо от других, с вероятностью *p.* Поэтому, для надежности сообщение повторяется 3раза.Найдите вероятность того, что хотя бы одно из переданных сообщений не будет искажено ни в одном знаке.

Задача 4. Истребитель и бомбардировщик ведут воздушный бой. Истребитель делает по бомбардировщику один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1. Если бомбардировщик этим выстрелом не сбит, он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, он еще раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найдите вероятности исходов следующих боев:

А – сбит бомбардировщик; В – сбит истребитель; С – сбит хотя бы один из самолетов.

Задача 5. Воздушный бой происходит между бомбардировщиком и двумя его атакующими истребителями. Бомбардировщик начинает стрельбу, он по каждому истребителю один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1. Если истребитель не сбит, то данный истребитель, независимо от другого, стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_2.Вычислите вероятности исходов следующих боев:

А – сбит бомбардировщик; В – сбиты оба истребителя; С – сбит хотя бы один истребитель; D – сбит хотя бы один самолет; Е – сбит только один истребитель.

Задача 6. Решите предыдущую задачу с изменениями в том, что истребители идут в атаку только попарно: если один из них сбит, то другой выходит из боя.

Задача 7. Некоторая цель должна быть поражена ракетами. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p, причем попадания отдельных ракет независимы. Вероятность поражения цели ракетой равна p_1. Стрельба ракетами ведется до тех пор, пока цель не будет поражена или до израсходования боевого запаса. На базе боезапас состоит из n ракет (n>2). Вычислите вероятность того, что весь запас не будет израсходован.

Задача 8. Решите предыдущую задачу. Найдите вероятность того, что после поражения цели на базе останутся неизрасходованными не менее двух ракет.

Задача 9. При условиях предыдущей задачи вычислите вероятность того, что будет израсходовано не более двух ракет.

Задача 10. Ракетами обстреливается корабль – нарушитель. Вероятность попадания каждой из ракет составляет 0,9. Попадания отдельных ракет независимы. Вероятность того, что попавшая в корабль ракета его потопит корабль – нарушитель – $\frac{2}{3}$. Атакующий ракетный катер ведет обстрел пока корабль – нарушитель не будет потоплен или не закончится боезапас из 5 ракет. Вычислите вероятность того, что корабль – нарушитель будет потоплен до момента, когда будет использован весь запас боеприпасов ракетного катера.

Решения и ответы к задачам для самостоятельного решения к теме Теоремы теории вероятностей

Задача 1. *Решение.* Пусть событие А - не все космические объекты, входящие в группу, будут обнаружены. Обозначим событие ему противоположное $\overline{A}$ - все объекты будут обнаружены. Тогда вероятность того, что все объекты будут обнаружены одной радиолокационной станцией, равна $1-(1-p)^5$. Вероятность события $\overline{A}$ равна $p(\overline{A}) = (1-(1-p)^5)^7$. Поэтому вероятность того, что не все космические объекты, входящие в группу, будут обнаружены, равна $p(A) = 1-(1-(1-p)^5)^7$. Ответ: $1-(1-(1-p)^5)^7$

Задача 2. *Решение.* P(A) = 1 - P($\overline{A}$), где $\overline{A}$ – самолет не обнаружен ни одной из РЛС, тогда $p(\overline{A}) = (1-p_1)^{10}(1-p_2)^{20}$, следовательно

$p(A)= 1 - (1-p_1)^{10}(1-p_2)^{20}$,

$p(B)= (1 - (1-p_1)^{10})(1-p_2)^{20}$,

$p(C)= (1-p_1)^5(1-p_2)^{10}(1 - (1-p_1)^5)(1-p_2)^{10}$.

Ответ: $1 - (1-p_1)^{10}(1-p_2)^{20}$; $(1 - (1-p_1)^{10})(1-p_2)^{20}$;

$(1-p_1)^5(1-p_2)^{10}(1 - (1-p_1)^5)(1-p_2)^{10}$.

Задача 3. *Решение.* При передаче каждый символ искажается, независимо от других, с вероятностью p, следовательно одно отдельное сообщение не искажено с вероятностью $p(A) = 1-(1-(1-p)^{32})^3$.

Задача 4. *Ответ:* $P(A) = p_1+(1 - p_1)(1 - p_2)p_3$; $P(B) = (1 - p_1)p_2$; $P(C) = P(A)+P(B)$.

Задача 5. *Решение:* Вероятность того, что один истребитель собьет бомбардировщик, равна $(1 - p_1)\,p_2$; вероятность того, что ни один из них не собьетбомбардировщика, равна $(1 - (1 - p_1)p_2)^2$, поэтому $P(A) = 1 - (1 - (1 - p_1)p_2)^2$; $P(B) = p_1{}^2$; $P(C) = 1 - (1 - p_1)^2$; $P(D) = 1 - (1 - p_1)^2 (1 - p_2)^2$; $P(E) = 2p_1(1 - p_1)$.

Задача 6. *Ответ:* $P(A) = (1 - p_1{}^2)(1-(1-p_2)^2)$; $P(B) = p_1{}^2$; $P(C) = 1 - (1 - p_1)^2$; $P(D) = 1 - (1 - p_1)^2 (1 - p_2{}^2)$; $P(E) = 2p_1(1 - p_1)$.

Задача 7. *Решение.* Пусть событие A – весь запас не израсходован, тогда $\overline{A}$ – весь боевой запас израсходован. Чтобы событие $\overline{A}$ произошло из *n* ракет первые из *n*-1ракет не должны поразить цель: $P(\overline{A}) = (1-pp_1)^{n-1}$, следовательно

$P(A) = 1-(1-pp_1)^{n-1}$

Ответ: $1-(1-pp_1)^{n-1}$

Задача 8. *Решение.* Пусть событие A - после поражения цели на базе останутся неизрасходованными не менее двух ракет, тогда $\overline{A}$– останется менее двух ракет. Чтобы событие $\overline{A}$ произошло из *n* ракет первые из *n*-2ракет не должны поразить цель: $P(\overline{A}) = (1-pp_1)^{n-2}$, следовательно

$P(A) = 1-(1-pp_1)^{n-2}$.

Ответ: $1-(1-pp_1)^{n-2}$.

Задача 9. Решение. Цель должна быть поражена при первых двух выстрелах, то вероятность равна $1-(1-pp_1)^2$. Ответ. $1-(1-pp_1)^2$.

Задача 10. *Ответ*: $\frac{609}{625}$.

РАЗДЕЛ 7.
11 класс
«Артиллерия и математика»

Введение.

Спецкурс «Артиллерия и математика» для кадет 11 классов соответствует целям и задачам обучения на уровне среднего общего образования. Основная функция данного раздела спецкурса – дополнительная подготовка обучающихся 11 классов к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ и к продолжению получения дальнейшего образования в военных учебных заведениях.

Данный раздел спецкурса познакомит кадет с вопросами практического применения математики в военном деле, покажет применение тригонометрических уравнений в автоматике управляемых снарядов, метод координат в военной топографии для связистов. Кадеты узнают, как использовать производную в теории полета ракет, в теории управления зенитными ракетами.

Требования программы направлены на реализацию деятельностного, практико-ориентированного и личностно-ориентированного подходов; овладение знаниями и умениями, необходимыми для дальнейшей профессиональной подготовки обучающихся в военных ВУЗах МИНОБОРОНЫ РОССИИ.

Цели курса: углубление и расширение знаний обучающихся по изучаемым темам; повышение эффективности подготовки обучающихся к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ; демонстрация значимость математики на примерах решения задач с военной составляющей; ориентация обучающихся к поступлению в военные учебные заведения, где одним из основных предметов является математика.

Задачи курса: расширить знания кадет по отдельным темам курса математики в старшей школе; развивать умение переводить военные задачи на язык математики; научить использовать знания для описания и решения задач с военной составляющей.

Тематическое планирование

Наименование темы (в соответствии с Примерной программой)	Кол-во часов	Характеристика видов деятельности обучающихся
1. Функции и графики. Использование свойств квадратичной функции и графика квадратичной функции - параболы в автономных системах управления баллистических ракет. Решение военно-прикладных задач с помощью свойств и графика квадратичной функции.	1ч	Строить графики квадратичных функций. Описывать их свойства. Использовать функционально-графический метод решения уравнений и неравенств.
2. Тригонометрия. Применение тригонометрических формул в баллистике управляемых ракет дальнего действия. Применение тригонометрических функций в автоматике управляемых снарядов нового поколения. Решение военно-прикладных задач с помощью тригонометрических функций	1ч	Применять тригонометрические формулы при решении уравнений и неравенств. Применять свойства тригонометрических функций при решении уравнений и неравенств.
3. Производная. Применение производной. Использование геометрического смысла производной – уравнения касательной в теории полета ракет. Применение механического смысла производной в управлении зенитными ракетами. Решение военно-прикладных задач с помощью производной.	1ч	Применять геометрический и физический смысл производной при решении задач.
4. Векторный и координатный методы решения геометрических задач. Формулы объемов геометрических тел. Метод координат в пространстве в военной топографии для связистов. Метод векторов в топографической службе. Использование формул для	1ч	Демонстрировать умение решать геометрические задачи с применением векторного метода и метода координат. Уметь решать геометрические задачи на вычисление объемов многогранников и тел вращения с применением формул.

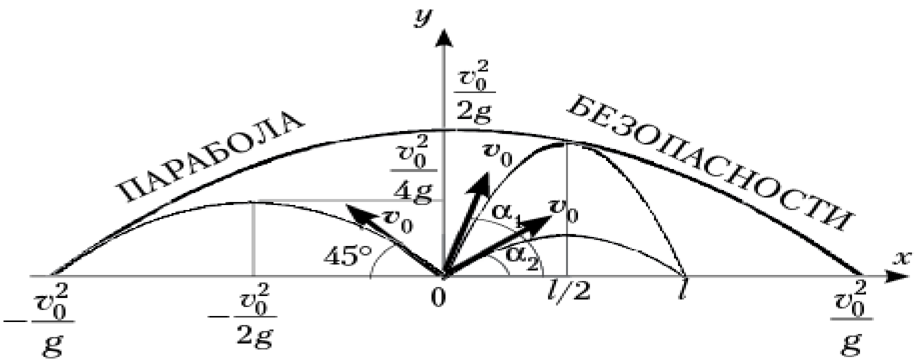
вычисления объемов тел в устройствах и проектировании стволов артиллерийских орудий. Решение военно-прикладных задач с помощью координат и формул площадей и объемов тел.		
5. Итоговое занятие	1ч	Защита решения задач по спецкурсу «Артиллерия и математика».
ИТОГО	5 часов	

Занятие 1.

Решение военно-прикладных задач с помощью свойств и графика квадратичной функции.

Баллистика – наука о движении тел, брошенных в пространстве, основанная на законах математики и физики. Она занимается исследованием движения снарядов из огнестрельного оружия, ракетных снарядов, баллистических ракет.

Известно, что траекторией тела, движущегося в поле тяготения Земли, является баллистическая кривая. Если считать поле тяготения однородным (что справедливо при начальной скорости тела, значительно меньшей первой космической) и, главное, пренебречь сопротивлением воздуха, то в первом приближении баллистической кривой будет парабола. Эта кривая является графиком детально изученной в школьном курсе математики квадратичной функции. Поэтому имеет смысл с позиций развития межпредметных связей курсов физики и математики рассмотреть движение тела, брошенного под углом к горизонту, опираясь, для цельности изложения, только на свойства квадратичной функции. При рассмотрении движения баллистической ракеты немаловажную роль играет парабола безопасности, т.к. все точки, лежащие вне этой параболы, не могут быть достигнуты снарядом при данной начальной скорости Vo и любом угле бросания α. Пусть тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью v 0 под углом α к горизонту.



Широко известное решение основной задачи механики для этого случая приведём сразу (y – вертикальная составляющая движения, x – горизонтальная составляющая движения):

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \cos\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Исключая из системы уравнений (1) время t, имеем уравнение траектории тела – параболу:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x. \quad (2)$$

Координаты вершины параболы (в общем виде) $y = ax^2 + bx + c$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{tg\,\alpha}{-\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}; \quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

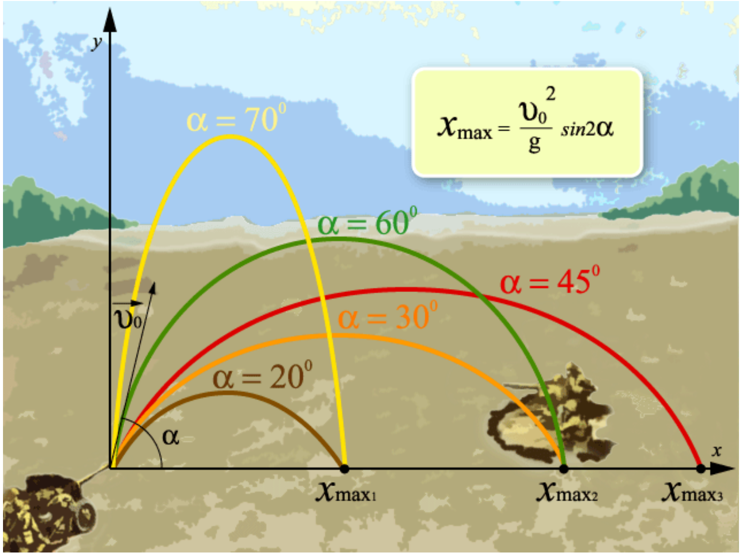
Значит, дальность полёта тела по горизонтали $l = 2x_0 = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$, а наибольшая высота подъёма тела $y_0 = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$

В момент падения тела y = 0, x = l. Для удобства дальнейшего изложения воспользуемся тригонометрическим тождеством $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha.$

Тогда уравнение (2) запишется как квадратное относительно tg α:

$$\frac{gl}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \frac{gl}{2v_0^2} = 0. \quad (3)$$

Потребуем неотрицательности дискриминанта уравнения (3): $1-\frac{g^2 l^2}{v_0^4}\geq 0.$



Отсюда сразу вытекает неравенство $l\leq\frac{v_0^2}{g}.$ Следовательно, наибольшее значение дальности полёта $l_m=\frac{v_0^2}{g},$ что будет при $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{gl_m}=1,$ т.е. при α = 45°. Конечно, сразу ясно: $l=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\leq\frac{v_0^2}{g},$ но интересно получить это, рассматривая квадратичную функцию.

Поставим своей задачей попасть в наземную цель, находящуюся на расстоянии

l < lm от точки выстрела. Для этого надо прицелиться – выбрать соответствующий угол α. Его найдём из уравнения (3).

Угол α1 соответствует навесной траектории, а угол α2 – настильной:

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gl}+\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2-1}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{l_m}{l}+\sqrt{\left(\frac{l_m}{l}\right)^2-1}\right)>45°.$$

$$\alpha_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gl}-\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2-1}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{l_m}{l}-\sqrt{\left(\frac{l_m}{l}\right)^2-1}\right)<45°.$$

Физически интересно сравнить время движения тела по навесной траектории $T_1=\frac{2v_0\sin\alpha_1}{g}$ и по настильной $T_2=\frac{2v_0\sin\alpha_2}{g}.$

Сначала заметим, что из формулы sin 2α = sin 2(90° – α) вытекает: дальность полёта тел, брошенных под углами α и 90° – α к горизонту, одна и та же. Таким образом, α2 = 90° – α1.

Имеем:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}=\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{v_0^2}{gl}+\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2-1}=\frac{l_m}{l}+\sqrt{\left(\frac{l_m}{l}\right)^2-1}>1.$$

В заключение получим уравнение параболы безопасности, отделяющей доступные цели от недоступных. Уравнение (2) с помощью формулы $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$ легко преобразуется к квадратному относительно tgα:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - x\operatorname{tg}\alpha + \left(y+\frac{gx^2}{2v_0^2}\right)=0. \qquad (4)$$

Если мы хотим попасть в точку М (x; y), то должен существовать корень (или корни) уравнения (4).

Значит, его дискриминант

$$D=x^2-\frac{gx^2}{v_0^2}\left(2y+\frac{gx^2}{v_0^2}\right)\geq 0.$$

Отсюда находим поражаемую область:

$y\leq\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$ Ясно, что если $y>\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2,$ то попасть в цель нельзя.

Таким образом, приходим к уравнению параболы безопасности: $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$

Пример: Снаряд выпущен из зенитного орудия с начальной скоростью v_0=150м/с под углом 60°. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить наибольшую высоту снаряда и дальность полета.

Решение: Уравнение траектории снаряда мы знаем $y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+\operatorname{tg}\alpha\cdot x.$ (y составляющая движение по вертикали, x – составляющая по горизонтали). Наибольшее значение высоты, т.е. значение y, будет достигаться в вершине параболы. Найдем абсциссу вершины по формуле $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{tg\alpha\cdot 2v_0^2.cos^2\alpha}{2g}=\frac{sin\alpha\cdot cos\alpha\cdot v_0^2}{g}$, тогда, подставив x_0 в уравнение, получим $y_0=\frac{v_0^2.sin^2\alpha}{2g}$=843,75 (м).

Используя свойство симметричности параболы, получим формулу дальности полета $l=2x_0=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g},$ l≈ 1948,6(м).

Задачи для самостоятельного решения.

1) Из баллистического пистолета вылетел снаряд под углом 30°, со скоростью 50 м/с. Найти дальность полета, максимальную высоту снаряда и время полета. (Указание: для нахождения времени полета использовать уравнение горизонтальной составляющей движения).

2) Снаряд выпущен из орудия с начальной скоростью v_0=30м/с под углом 45° к горизонту. Найти уравнение траектории его движения и расстояние между начальной и конечной точками движения.

Занятие 2.

Решение военно-прикладных задач с помощью тригонометрических функций.

Тригонометрия – раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Возникла и развивалась в древности как один из разделов астрономии, как ее вычислительный аппарат, отвечающий практическим нуждам человека. С ее помощью можно определить расстояние до недоступных предметов и существенно упрощать процесс геодезической съемки местности для составления географических и топологических карт. Общепринятые понятия тригонометрии, а также обозначения и определения тригонометрических функций сформировались в процессе долгого исторического развития.

Тригонометрические сведения были известны еще древним вавилонянам и египтянам. Но основы этой науки заложены в Древней Греции, встречающиеся уже в III веке до н. э. Древнегреческие астрономы успешно решали отдельные вопросы из тригонометрии, связанные с астрономией. Но они рассматривали не линии синуса и косинуса, а хорды. Роль линии синусов угла у них выполняла хорда, стягивающая дугу, равную 2α.

Из науки, обслуживающей астрономию, в особую математическую дисциплину тригонометрия превратилась благодаря среднеазиатским ученым. Это отделение обычно связывают с именем персидского (азербайджанского) математика Насир ад-Дина Туси (1201-1274).

Памятник установлен перед входом Гянджинского филиала НАН Азербайджана.

С именем итальянского математика Никколо Тарталья (1499 1557гг) связывают практическое применение тригонометрии в артиллерии.

В оставленных Тартальей сочинениях он рассматривает не только вопросы математики, но и некоторые вопросы практической механики, баллистики и топографии. Так, в первом из его сочинений, «Новая наука» (1537г), он впервые рассматривает вопрос о траектории выпущенного снаряда. Он утверждает, что траектория эта на всем ее протяжении – есть кривая линия, между тем как до него учили, что траектория снаряда состоит из двух прямых, соединенных кривой линией.

Размышляя над движением артиллерийских снарядов, Тарталья предположил, что снаряд пролетит наибольшее расстояние, если наклонить орудие к горизонту под углом 45◦

В самом деле, функция $y = \sin 2\alpha$ принимает наибольшее значение, равное 1, если 2α = 90◦ т.е. при α = 45◦. А это значит, что наибольшая дальность поражения получится, если наклонить орудие под углом 45◦ к горизонту. Кроме того, так как $\sin 2\alpha = \sin 2(90 - \alpha)$, то при углах наклона α и 90◦ - α снаряд попадает в одну и ту же точку.

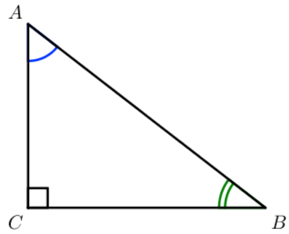
Подробное обоснование этому предположению представлено в занятии № 1 *«Решение военно-прикладных задач с помощью свойств и графика квадратичной функции»*.

Будущему артиллеристу надо так хорошо владеть теорией, чтобы даже в бою, под огнем неприятеля, он не ошибался в расчетах, уверенно и спокойно применяя нужные формулы.

Для полного же понимания теории стрельбы и науки о полете снаряда – баллистики – надо знать еще и высшую математику.

Повторим теорию.

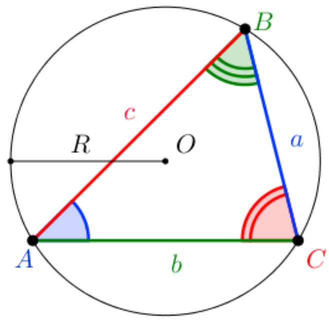
I. Рассмотрим *прямоугольный треугольник* ABC с прямым углом C, равным 90◦; острым углом A, равным α; катетами AC = b, BC = a и гипотенузой AB = c.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \mathrm{tg} = \frac{a}{b}.$$

II. Расширенная теорема синусов

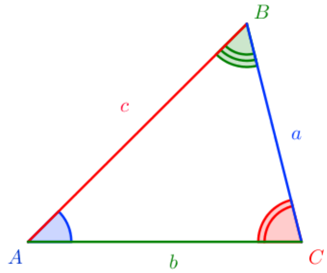
Отношение сторон треугольника к синусам противолежащих углов равно двум радиусам описанной около данного треугольника окружности.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

III. Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc*\cos A$$

Примеры:

1. Окоп противника на расстоянии 1 км виден под углом 0,017 артиллерийских единиц. Какова его длина?

Справка: в артиллерии для измерения углов используется своя система. Круг делится на 60 артиллерийских единиц (а.е.), т.е. 360° = 60 а.е., 6° = 1 а.е.

0,01 а.е. называется малой единицей. Поэтому угол обозначается так: 3-10 (3 больших единицы и 10 малых). Эту величину легко перевести в градусы:

3,10 * 6◦ = 18,6◦.

Решение:

Считая расстояние 1000 м, а длину окопа (*l*) катетом прямоугольного треугольника, получим: *l* = 1000 * tg α.

α = 0,017 a.e. = 0,017 * 6◦ = 0,102◦ ~ 0,1◦ = 6′. По таблицам Брадиса определяем, что tg 6′ = 0,0017. Тогда *l* = 1000 * 0,0017 = 1,7 м.

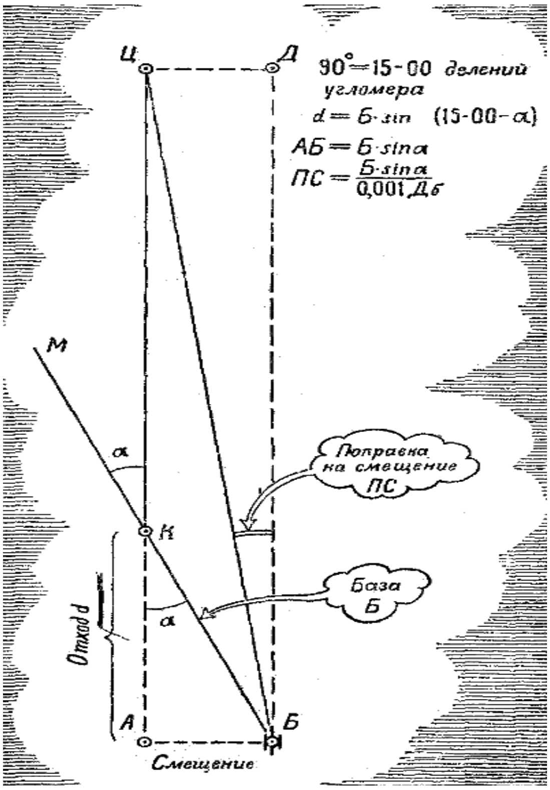
Ответ: 1,7 м.

Артиллеристу на поле боя приходится решать и более сложные задачи. Часто можно услышать, что командирами-артиллеристами могут стать только хорошие математики.

Математика дает артиллеристу все формулы, необходимые для расчетов.

Рассмотрим следующую задачу.

Представьте себе взаимное расположение батареи, наблюдательного пункта и цели такое, как показано на рисунке:



Какой прицел надо назначить артиллеристу, чтобы поразить цель? И как можно рассчитать «поправку на смещение»?

Для того, чтобы сделать расчеты, надо знать три величины:

1) Дк – дальность командира (удаленность командира от цели поражения);

2) Б – «база» (расстояние от батареи до наблюдательного пункта);

3) α – угол, составленный направлениями «наблюдательный пункт - цель» и «наблюдательный пункт - батарея».

Решение: опустим из точки Б (батарея) перпендикуляр на продолжение линии КЦ (командир - цель). В прямоугольном треугольнике АБК нам известна гипотенуза КБ и угол АКБ, который, как вертикальный, равен измеренному с помощью буссоли углу ЦКМ. Зная эти две величины и тригонометрию, нетрудно найти катет АК = d (в артиллерии его называют «отход»): d = КБ * cos α или d = КБ * sin (90◦ - α).

А расстояние от батареи до цели без значительной ошибки можно принять в нашем случае равным КЦ + АК, то есть расстоянию от командира до цели плюс отход: Дб = Дк + d.

Таким образом, мы знаем теперь, какой надо назначить прицел. Нетрудно подсчитать и ПС «поправку на смещение». Для этого достаточно изучить чертеж и формулы, приведенные на рисунке: ПС = $\frac{КБ*sin\alpha}{0.001*Дб}$.

Теперь вы можете не только направить батарею в цель, но и сосчитать коэффициент удаления и шаг угломера.

Ку = $\frac{Дк}{Дб}$; Шу = б*$\frac{ПС}{П}$, где б – ширина вилки, выраженная в делениях прицела, П – прицел от батареи до цели.

Для справки:

Артиллерийская буссоль – вид буссоли в артиллерии, применяемый для определения магнитных азимутов и дирекционных углов,

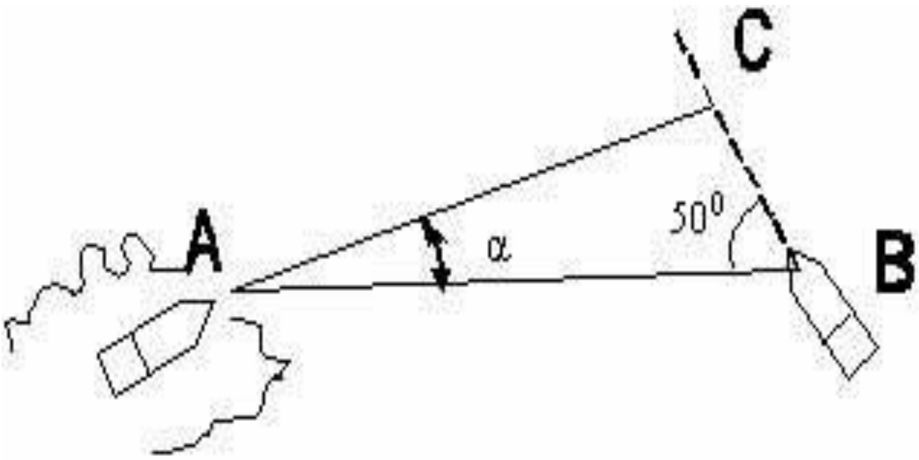
ориентирования орудий и приборов в заданном направлении, измерении расстояния, засечки целей, а также для наблюдения и разведки.

Поправка направления, с помощью которой при изменении установки прицела удерживают разрыв линии наблюдения, называется **«шагом угломера».**

Всем этим далеко не ограничиваются случаи применения математики в артиллерии. Артиллеристу она нужна буквально на каждом шагу. Даже из приведенных здесь примеров ясно, что артиллерист должен отлично знать и арифметику, и геометрию, и тригонометрию, и алгебру, и, отчасти, аналитическую геометрию.

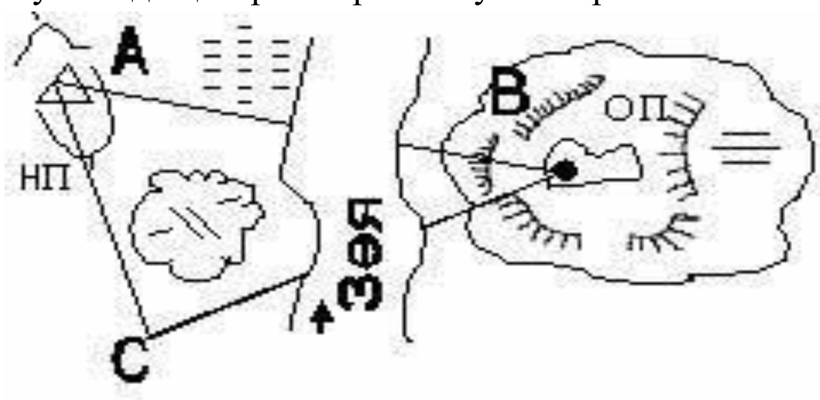
Задачи для самостоятельного решения

1. Из орудия БМП в засаде необходимо сделать выстрел по движущейся по дороге БМП противника «Мардер». Скорость цели 40 км/ч, и она движется под углом 50◦ к линии визирования АВ (рис.). Определить угол упреждения α, который нужно учесть наводчику при прицеливании, если скорость снаряда равна 750 м/с.



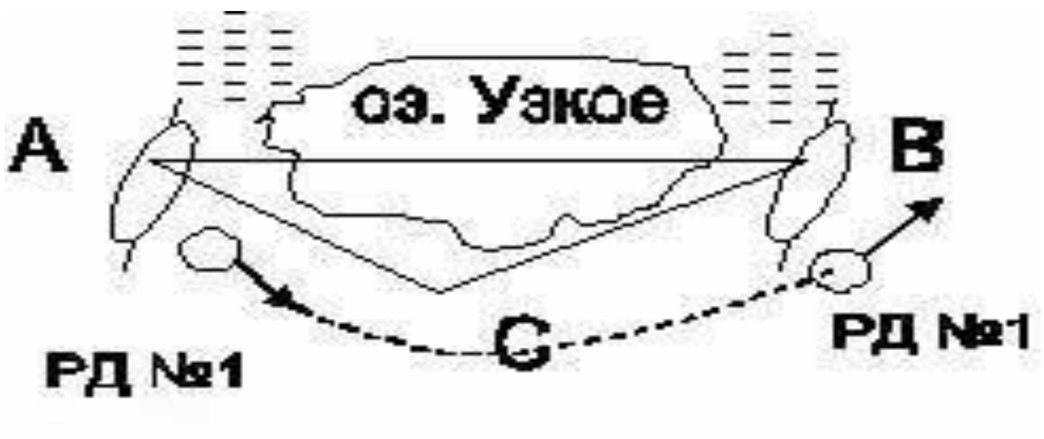
2. Для определения расстояния от наблюдательного пункта А до центра опорного пункта подразделения противника В построен треугольник АВС.

Длина АС = 432 м, $\angle A = 66^0$, $\angle C = 84^0$. Определить расстояние от наблюдательного пункта до центра опорного пункта противника.



3. В ходе ведения разведки РД № 1 установил непроходимые участки местности. Для определения расстояния между пунктами А и В, разделенными непроходимым участком местности, построен треугольник АВС. Определить расстояние между пунктами А и В, если АС = 2,8 км,

ВС = 3,9 км, $\angle C = 120^0$.



Занятие 3.
Решение военно-прикладных задач с помощью производной.

Нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применѐнной к явлениям природы, изучаемых физикой.
Н.И. Лобачевский.

С производной непрерывной функции и интегралами знакомы все выпускники средней школы. А в XVII веке интегральное и дифференциальное исчисление было создано великими учеными Ньютоном, Лейбницем, Лагранжем.

– Ньютон. Задача определения скорости прямолинейного неравномерного движения была впервые решена Ньютоном. Функцию он назвал флюэнтой, т.е. текущей величиной, производную же – флюксией. Ньютон пришел к понятию производной, исходя из вопросов механики. Предполагают, что Ньютон открыл свой метод флюксий ещё в середине 60-х годов XVII в.

– Лейбниц. Создатель Берлинской академии наук. Основоположник дифференциального исчисления, ввёл большую часть современной символики математического анализа. Лейбниц пришёл к понятию производной, решая задачу проведения касательной к производной линии, объяснив этим ее геометрический смысл.

– Лагранж. В 19 лет стал профессором в Артиллерийской школе Турина. Именно Лагранж в 1791 г. ввёл термин «производная», ему же мы обязаны и современным обозначением производной (с помощью штриха). Термин «вторая производная» и обозначение (два штриха) также ввёл Лангранж.

Вспомним теоретический материал, связанный с производной функции.

Физический и механический смысл производной:

$x'(t)=v(t);\quad v'(t)=a(t)$, где x – перемещение точки, v – скорость перемещения, a- ускорение перемещения.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)=k_{кас}=tg\alpha;$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания и равен тангенсу угла наклона касательной в точке касания.

Формулы применения производной в физике

Физическая величина	Среднее значение	Мгновенное значение
Скорость	$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\upsilon = \frac{ds}{dt} = s'$
Ускорение	$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$	$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon'$
Угловая скорость	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$
Сила тока	$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	$i = \frac{dq}{dt} = q'$
Мощность	$P = \frac{A}{\Delta t}$	$P = \frac{\delta A}{dt}$

Закон	Среднее значение	Мгновенное значение
Второй закон Ньютона	$F = ma$	$f = m\frac{d\upsilon}{dt}$
Закон ЭМИ	$\xi_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$	$e_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi'$
Закон самоиндукции	$\xi_{is} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$	$e_{is} = -L\frac{di}{dt} = -Li'$

Формулы производных и правила дифференцирования

Функция	Производная функции	Функция	Производная функции	Правила дифференцирования
$f(x) = C$	$f'(x) = 0$	$f(x) = ctgx$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(u+v)' = u' + v'$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$(u \cdot v)' = u'v + v'u$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln x}$	$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$
$f(x) = tgx$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	

Алгоритм нахождения наименьшего
и наибольшего значений
непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. **Найти производную $f'(x)$.**
2. **Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.**
3. **Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).**

Рассмотрим решение задач.

Задача 1: Горизонтальная дальность полета мины может быть приближенно вычислена по формуле $x(\theta_\circ) = \frac{\upsilon_\circ^2 \sin 2\theta_\circ}{g}$, где υо – начальная скорость; θо - угол бросания, g – ускорение силы тяжести. При каком θо горизонтальная дальность будет наибольшей?

Решение:

Найдем производную функции $x(\theta_\circ) = \frac{\upsilon_\circ^2 \sin 2\theta_\circ}{g}$ и стационарные точки.

$x' = \dfrac{2V_\circ}{g} cos\, 2\theta_\circ, x' = 0$ при $cos\, 2\theta_\circ = 0$

$2\theta_\circ = \frac{\pi}{2} + \pi n, \theta_\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, по условию $\theta_\circ \epsilon [0; \frac{\pi}{2}]$

$x(0) = \frac{\upsilon_\circ^2\, sin\, 0}{g} = 0;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\upsilon_\circ^2\, sin\, \pi}{g} = 0;\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\upsilon_\circ^2\, sin\frac{\pi}{2}}{g} = \frac{\upsilon_\circ^2}{g}$

Наибольшее горизонтальная дальность полета мины достигается при $\theta_\circ = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $\theta_\circ = \frac{\pi}{4}$

Задача 2: Ракета с нулевой начальной скоростью движется прямолинейно под действием отдачи от струи газа со скоростью 2 км/с. Масса ракеты с полным запасом топлива равна 400 т, без топлива – 50 т. Найти скорость движения ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

Решение: пусть *m(t)* и*v(t)* – масса и скорость ракеты в момент времени t. Тогда уравнение Мещерского запишется в виде $mv' = -2m'$ или $m\dfrac{dv}{dt} = -2\dfrac{dm}{dt}$.

Получили простейшее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$m\frac{dv}{dt} = -2\frac{dm}{dt}$$

$$mdv = -2dm$$

$$dv = \frac{-2}{m}dm$$

$$v = -2\ln m + c$$

$v = -2\ln m + c$ – общее решение уравнения. Из условия $v(400) = 0$, находим с и v.

$$0 = -2\ln 400 + c$$

$$c = 2\ln 400$$

$$v = -2\ln m + 2\ln 400 = 2(\ln 400 - \ln m) = 2lm\frac{400}{m}$$

При m=50, получим, что после сгорания топлива скорость ракеты достигнет

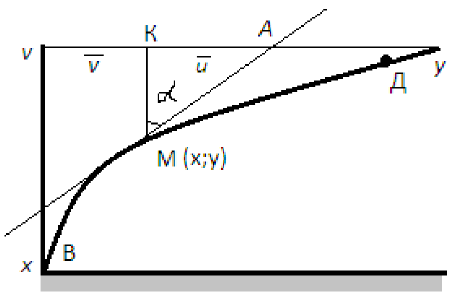
$$v = 2lm\frac{400}{m} = 2lm8 \approx 4{,}16 км/ч$$

Ответ: 4,16 км/с

Задача 3: (задача о преследовании)

На земле в точке B стоит ракетный комплекс. Над ним на высоте h по прямой пролетает цель A со скоростью v. В момент, когда цель была над ракетой в точке O, произведён пуск. Ракета M движется с постоянной скоростью u и в каждый момент направлена на цель. Найти траекторию ракеты ВМД и время, через которое цель будет поражена.

Решение:



Определим в начальный момент $t = 0$ координаты цели A (0,0) и ракеты M (h,0). Тогда в момент t их координаты: A (0, v t), M (x, y).

$tg\alpha = -y' = \frac{KA}{KM} = \frac{vt-y}{x}$.

Выразим от сюда t:

$t = \frac{y-xy^2}{v}$ и продифференцируем:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{xy^2}{v}. (1)$$

С другой стороны, по законам механики $u = \frac{dl}{dt}$, где dl – дифференциал дуги BMD. В курсе высшей математики доказывается, что $dl = \sqrt{1 + y^2 dx}$.

В нашей задаче dxотрицательно, поэтому $dl = -\sqrt{1 + y^2 dx}$.

Отсюда $dt = \frac{dl}{u} = \frac{-\sqrt{1+y^2}}{u} dx, \frac{dt}{dx} = -\frac{\sqrt{1+y^2}}{u}$. (2)

Сравнивая равенства (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет кривая преследования:

$$y = y(x): \frac{xy}{v} = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{u}$$

Введём обозначение $k = \frac{v}{i}$, тогда уравнение примет вид

$$xy = k\sqrt{1 + y^2}. \ (3)$$

Его решение должно удовлетворять начальным условиямm

$$y(h) = y(h) = 0.$$

В уравнение (3) не входит неизвестная функция y(x), поэтому можно ввести новую переменную $p = y(x)$.

Преобразуем уравнение (3):

$$xp = k\sqrt{1 + p^2}, \frac{dp}{dx} = \frac{k\sqrt{1+p^2}}{x}, \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{k \cdot dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right| = klnx + C. \ (4)$$

Чтобы использовать условие $y(h) = p(h) = 0$, нужно в последнее равенство подставить $x = h,$ p $= 0: C = -klnh$.

Тогда,

$$ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right| = kln\frac{x}{h}, p + \sqrt{1 + p^2} = \left|\frac{x}{h}\right|^k. \ (5)$$

Выразим отсюда p. Приравняем обратные величины:

$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = \left|\frac{x}{h}\right|^{-k}$, но $\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1 + p^2} - p = \left|\frac{x}{h}\right|^{-k}, p - \sqrt{1 + p^2} = -\left|\frac{x}{h}\right|^{-k}$ (6)

Складывая равенства (5) и (6), получим:

$$y = p = \frac{1}{2}\left|\left|\frac{x}{h}\right|^k - \left|\frac{x}{h}\right|^{-k}\right|.$$

Интегрируем это равенство:

$$y = \int y dx = \frac{h}{2}\left|\frac{1}{k+1}\left|\frac{x}{h}\right|^{k+1} - \frac{1}{1-k}\left|\frac{x}{h}\right|^{1-k}\right| + C,$$

Константу C_1 найдем из условия $y(h) = 0$, то есть подставим в последнее равенство $x = h$, $y = 0$, $C = \frac{kh}{1-k^2}$.

Окончательно получим,

$$y = \frac{h}{2}\left|\frac{1}{k+1}\left|\frac{x}{h}\right|^{k+1} - \frac{1}{1-k}\left|\frac{x}{h}\right|^{1-k}\right| + \frac{kh}{1-k^2}.$$

Дифференцируя два раза, убедимся, что y удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям.

В точке D: $x = 0$, $y(0) = \frac{kh}{1-k^2} = \frac{huv}{u^2-v^2}$ – это расстояние, которое пролетит цель до точки D. На этот полёт понадобится время: $t = \frac{y(0)}{v} = \frac{uv}{u^2-v^2}$.

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>.

1) Уравнения траектории полета снаряда в безвоздушном пространстве имеет вид: $y = xtg\theta_\circ - \frac{gx^2}{2V_\circ^2 cos^2\theta_\circ}$, , где θо – угол бросания, υо- начальная скорость, g – ускорение силы тяжести. При каком значении xснаряд достигает максимальной высоты?

2) Скорость движения десантника-парашютиста при прыжках с задержкой раскрытия парашюта до 10с с высоты 2000м определяется следующей приближенной зависимостью:

υ = 9,8t - 0,45t2, где t – в секундах, υ - в м/сек. Определить на сколько снизится десантник за первые 5 сек свободного падения.

3) Ракета с начальной массой 250т движется вертикально вверх под действием тяги реактивного двигателя. Скорость истечения газов и секундный расход топлива постоянны и равны 3 км/ч и 1 т/с соответственно. Найти функцию скорости движения ракеты, если на поверхности Земли скорость ракеты равна 0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответы и указания.

1) Используйте алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего значения функции)

$$y' = tg\theta_\circ - \frac{gx}{V_\circ^2 cos^2\theta_\circ}$$

$$y' = 0 \text{ при } tg\,\theta_\circ \cdot V_\circ^2 cos^2\theta_\circ - gx = 0,$$

$$gx = V_\circ^2\, tg\,\theta_\circ \cdot cos^2\theta_\circ, \qquad x = \frac{V_\circ^2}{g} sin\,\theta_\circ\, cos\,\theta_\circ = \frac{V_\circ^2}{2g}\, sin2\theta_\circ$$

Ответ: $x = \frac{V_\circ^2\, sin\,2\,\theta_\circ}{2g}$.

2) *Указание.* Используйте физический смысл производной и определённого интеграла.

$$S = \int_{t_2}^{t_1} V(t)\alpha t$$

$$= \int_0^5 (9{,}8 - 0{,}45t^2)\alpha t$$

$$= \left(\frac{9{,}8t^2}{2} - \frac{0{,}45}{3}\right)\Big|_0^5 = \frac{9{,}8t^2 \cdot 25}{2} - \frac{0{,}45 \cdot 125}{3} = 103{,}75 \text{ м} \approx 104 \text{ м}$$

Ответ: 104 м.

3) Решение аналогично разобранной задачи 2. Пусть *m(t)* и*v(t)* – масса и скорость ракеты в момент времени t. На движение ракеты оказывает влияние сила тяги двигателя ракеты и сила тяжести Земли. $F = mg$. Учитывая, что ускорение свободного падения $g = 0{,}01 км/с^2$, получим уравнение Мещерского в виде $mv' = -0{,}01m - 3m'$

$$v' = -0{,}01 - \frac{3}{m}m'$$

Интегрируя обе части по переменной t, найдем $v = -0{,}01t - 3\ln m + c$. Так как в момент старта скорость равна 0, а масса составляет 250т, то

$$v = 3\ln\frac{250}{m} - 0{,}01t$$

Учитывая, что скорость расхода топлива $m' = -1m/c$*, находим* $m = -t + c$*, при* t=*0,* m=*250, получаем* c=*250,* m=*250*-t, $v = 3\ln\frac{250}{250-t} - 0{,}01t = -3\ln(1 - 0{,}004t) - 0{,}01t$

Ответ: $v = -3\ln(1 - 0{,}004t) - 0{,}01t$

Занятие 4.

Решение военно-прикладных задач с помощью координат и формул площадей и объемов тел.

В современном бою, когда успех очень часто решают минуты, а иногда и секунды, наряду с применением точной измерительной техники не менее важно, чтобы каждый воин и тем более командир обладал хорошим глазомером и мог, применяя простейшие способы измерений, быстро и достаточно точно определять расстояния до целей, ориентиров и других объектов, а также направления на них. Особенно это важно для мотострелковых подразделений. Такие простейшие угловые и линейные измерения постоянно требуются при разведке, ориентировании на местности и особенно при подготовке исходных данных для стрельбы. Метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Умение решать задачи векторно-координатным методом позволяет в артиллерии определять координаты объекта и находить расстояние до цели. Поэтому для измерений и расчетов применяются топографические карты.

Топографическая карта — это подробное изображение земной поверхности в уменьшенном виде, содержащее координатную сетку с условными знаками.

Топографическая карта содержит сведения об опорных геодезических пунктах, рельефе, гидрографии, растительности, грунтах, хозяйственных и культурных объектах, дорогах, коммуникациях, границах и других объектах местности. Всё это позволяет, используя топографическую карту , узнавать информацию о местности и используется для ее изучения, определения расстояний и площадей, дирекционных углов, координат различных объектов и решения других измерительных задач.

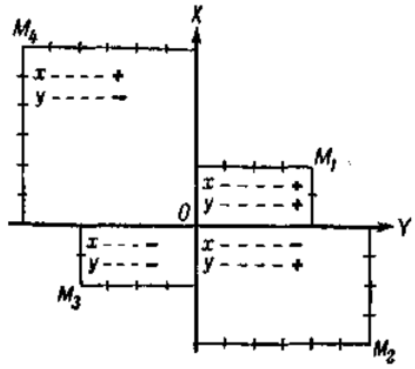
Топографические карты широко применяются в военном деле, строительстве, лесном деле и сельскохозяйственном производстве, как средство ориентирования в экспедициях, туристических походах и поездках и т.п.

Топографические карты строятся по законам проектирования физических тел на плоскость, имеют опорную геодезическую сеть и стабильную систему обозначений, что в совокупности обусловливает возможность получения по ним наглядной, точной и сопоставимой общегеографической информации о местности. Создаются топографические карты, главным образом, в результате обработки снимков из космоса, реже – аэрофотоснимков территории или путем непосредственной наземной топографической съемки местности.

Каким же образом определяются координаты цели и наносятся на карту?

Следует отметить, что понятие координат, используемых в военном деле и при нанесении на топографическую карту, созвучно с понятием, которое представлено в школьном курсе геометрии. Только здесь работают с плоскими прямоугольными координатами.

Плоскими прямоугольными координатами называются линейные величины – абсцисса и ордината, определяющие положение точек на плоскости. Две взаимно перпендикулярные прямые X и Y, относительно которых определяется положение точек, называются осями координат; из них ось X называется осью абсцисс, а ось Y — осью ординат. Точка пересечения осей (точка О) — называется началом координат.



Оси координат делят плоскость на четыре четверти, счет которых ведется в топографии по ходу часовой стрелки от положительного направления оси X. За положительное направление осей координат принимается для оси абсцисс (X) направление на север, а для оси ординат (Y) — на восток. Положение любой точки М на плоскости относительно начала координат определяется кратчайшими расстояниями до нее от осей координат, измеренными в каких-либо мерах длины, например в метрах. Эти расстояния, являющиеся координатами точек, изображаются, отрезками прямых линий, перпендикулярных к одной из координатных осей и параллельных другой. Координата X — абсцисса — вверх от оси Y считается положительной, а вниз от нее — отрицательной. Координата Y — ордината — вправо от оси X считается положительной, а влево от нее — отрицательной.

На топографические карты наносится прямоугольная координатная сетка И тогда определение координат значительно упрощается, если разбить на плоскости (на карте) прямыми линиями, параллельными осям координат, сетку квадратов с размерами сторон, допустим, в 2, 4 или 5 см. Такая сетка называется прямоугольной координатной сеткой. На топографических картах прямоугольная координатная сетка наносится не произвольно, а в определенной связи с географической сеткой меридианов и параллелей. Это дает возможность удобно и просто наносить на карту, а также определять и указывать по ней в плоских прямоугольных координатах географическое положение любого пункта местности. Как построить прямоугольную координатную сетку? Земной шар для изображения на топографических картах разбивается на шестиградусные меридианные зоны, для каждой из которых в данном масштабе изготовляется своя отдельная карта, состоящая из многих листов. В любой из этих зон осевой меридиан и экватор изображаются на карте взаимно-перпендикулярными линиями. Приняв осевой меридиан в каждой зоне за ось X (абсцисс), экватор — за ось Y (ординат), а их пересечение за начало координат, получим систему плоских прямоугольных координат для данной зоны. Таким образом, каждая зона будет иметь свои собственные оси и начало координат, иными словами, свою отдельную систему координат. Вместе с тем оси и начало координат в каждой зоне будут иметь вполне определенное географическое положение, а следовательно, и связь как с системой географических координат, так и с системами прямоугольных координат всех остальных зон. Это единство и взаимная связь отдельных координатных зон, объединенных общей для всего земного шара системой меридианов (осевым меридианом зоны), а ось Y — с экватором. Если теперь на каждую зону отдельно нанести координатную сетку со сторонами квадратов в 1 или 2 км в масштабе карты и оцифровать ее соответствующим образом, то такая сетка будет, по существу, графическим выражением плоской прямоугольной системы декартовых координат, все линии которой будут связаны определенным образом с географической сеткой меридианов и параллелей. Благодаря наличию на карте координатной сетки прямоугольные координаты любой точки просто и удобно могут быть измерены от ближайших к ней координатных линий X и Y, оцифровка (нумерация) которых на карте укажет их удаление в километрах от осей координат.

Абсциссы X всех точек, находящихся в северной половине зоны, имеют положительное, значение. Ординаты же Y будут иметь разные знаки: к востоку от осевого меридиана — знак плюс (+). к западу — знак минус (—).

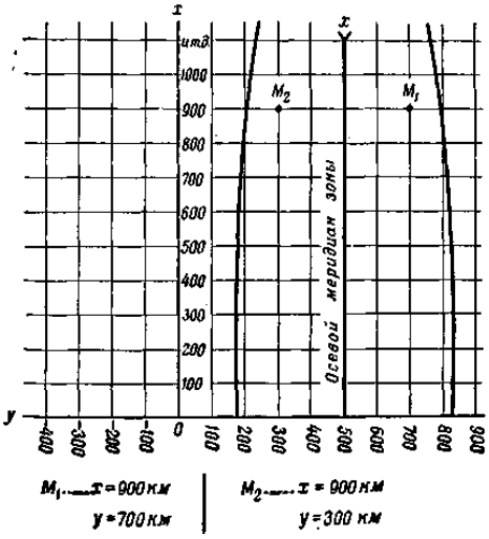


Рис.1

Чтобы не иметь дела с различными знаками, что затрудняло бы работу, значение ординаты Y осевого меридиана условно принимают равным не нулю, а 500 км. Этим самым ось X как бы переносят к западу (влево) от осевого меридиана на 500 км. В результате этого все ординаты Y в пределах всей зоны будут иметь лишь положительные значения, возрастающие с запада на восток, при этом к востоку от осевого меридиана они будут иметь значения, большие 500 км, а к западу — меньшие. Если изображение зоны с нанесенной на ней сеткой квадратов разделить на отдельные листы карты, то каждый лист будет покрыт координатной сеткой, составляющей часть разграфки, общей для всей зоны. Так как линии, образующие эту сетку, отстоят одна от другой на целое число километров, отложенных в масштабе карты, они называются километровыми линиями (горизонтальными или вертикальными). По той же причине и вся координатная сетка иногда называется километровой. Размеры квадратов сетки, т. е. расстояния между соседними километровыми линиями, на наших картах приняты следующие: На карте 1 : 25 000 - 4 см, т.е. 1 км в масштабе карты; На карте 1 : 50 000 - 2 см, т.е. 1 км в масштабе карты; На карте 1 : 100 000 – 2 см, т.е. 2 км в масштабе карты; На карте 1 : 200 000 - 2 см, т.е. 4 км в масштабе карты. Цифровое обозначение километровых линий и координатных зон на картах. Каждая координатная зона имеет свой порядковый номер. Счет зон (от 1 до 60) ведется от Гринвичского меридиана, с запада на восток. Западной границей первой зоны является начальный меридиан, долгота которого 0°. Вся территория РФ, растянутая по долготе примерно на 170°, охватывает 29 зон, начиная с четвертой; из них на долю Европейской части РФ приходится шесть зон — с четвертой по девятую включительно. В каждой зоне числовые значения координат X и Y повторяются. Чтобы можно было определить, к какой зоне относится точка с указанными координатами, и тем самым найти ее положение на земном шаре, к значению координаты Y слева приписывается цифра, означающая номер зоны.

Если бы точки M1 и M2 (рис 1). находились, допустим, в четвертой зоне, то их координаты X и Y были бы: для точки M1 X1 = 900 км, Y1 = 4700 км**,** для точки M2 X2 = 900 км , Y2= 4300 км . Все километровые линии подписаны на карте в соответствии с рассмотренным нами порядком счета координат. Цифры у выходов километровых линий за рамку означают координаты их в километрах. Координаты линий, ближайших к углам рамки, подписываются полностью, остальные — сокращенно, последними двумя цифрами

Таким образом, подпись 7434 у крайней справа вертикальной километровой линии (рис.2) означает, что эта линия находится в седьмой зоне и проходит в 66 км западнее осевого меридиана зоны (для которого Y =500 км).Подпись 6062 у крайней снизу горизонтальной километровой линии означает, что она проходит в 6 062 км к северу от земного экватора. При работе на карте обычно нет надобности пользоваться всеми этими четырьмя цифрами координат. На площадях в пределах нескольких сотен квадратных километров достаточно оперировать лишь последними двумя цифрами, которые на квотах подписаны у выходов километровых линий за рамку более крупным шрифтом.

Путаницы при этом никакой не произойдет, так как в пределах всей площади не будет повторения одинаковых комбинаций цифр. Полное цифровое обозначение километровых линий придется делать очень редко, например, когда потребуется указать зону, в которой находится данный район, или же пользоваться координатами геодезических пунктов при решении специальных задач. В полевых условиях часто приходится пользоваться картой в сложенном виде. Для того чтобы можно было узнать координаты километровых линий, не развертывая всей карты, их подписывают в нескольких местах внутри каждого ее листа, у пересечения горизонтальных линий с вертикальными. Дополнительная сетка на стыке соседних зон. Так как вертикальные километровые линии параллельны осевому меридиану своей зоны, а осевые меридианы соседних зон между собой не параллельны, то при смыкании сеток двух зон линии одной из них расположатся под углом к линиям другой. Вследствие этого при работе на стыке двух зон могут возникнуть затруднения с использованием координатных сеток, так как они метровых линий на стыке смежных зон будут относиться к разным осям координат. (рис.3)

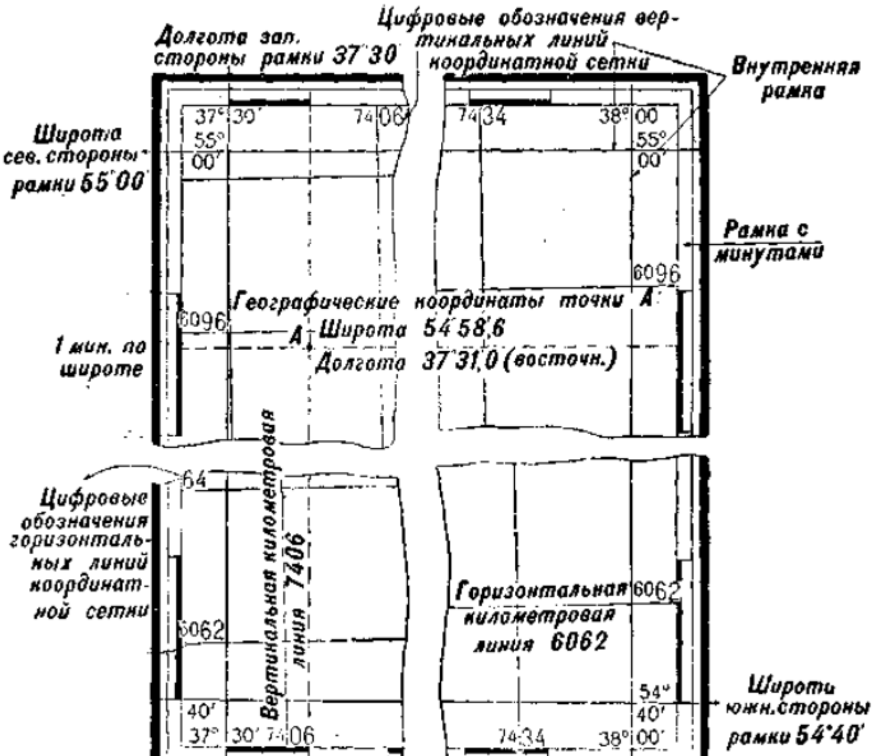


Рис. 2

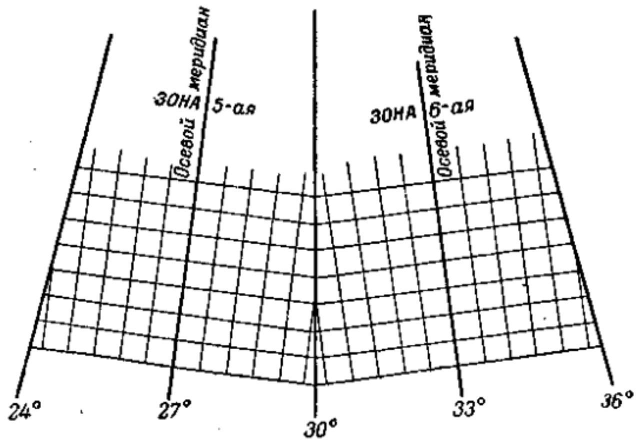
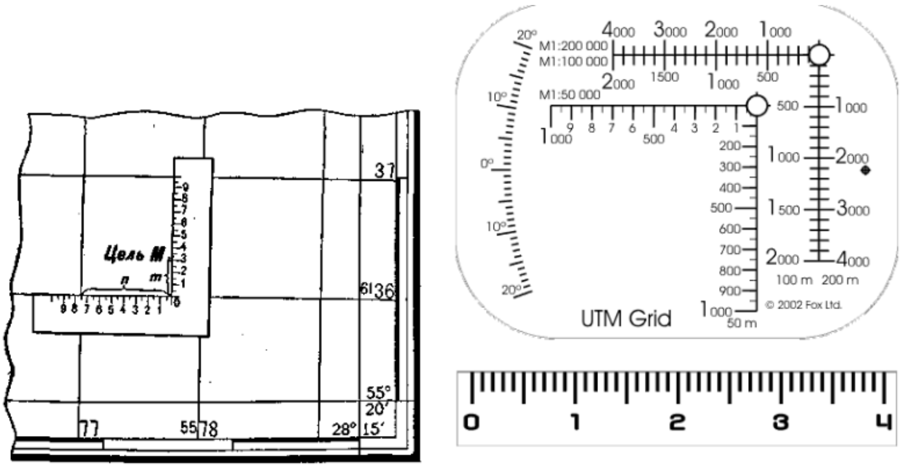


Рис.3

Чтобы устранить это неудобство, в каждой зоне все листы карт, расположенные в пределах 2° к востоку и западу от границы зоны, имеют, помимо своей координатной сетки, еще дополнительную, являющуюся продолжением сетки соседней зоны. Чтобы не затемнить такие листы карты, дополнительную сетку обозначают на карте лишь ее выходами между шкалой минут и внешней рамкой листа. Оцифровка ее составляет продолжение нумерации линий смежной зоны и подписывается за внешней рамкой. Если работа ведется с листами карты на стыке двух зон и требуется пользоваться на всех этих листах единой системой координат, надо на листах карты одной зоны соединить карандашом по линейке противоположные концы одноименных километровых линий сетки соседней зоны (вертикальных и горизонтальных). В дальнейшем при работе на этих листах следует пользоваться лишь новой дополнительной сеткой.

Определение прямоугольных координат точек по карте. Если необходимо указать более точно положение какой-либо точки (цели) внутри квадрата, определяют ее координаты (рис.4), отдельно абсциссу X и ординату Y. Для этого записываю нижнюю километровую линию квадрата (т. е. 36), в котором находится определяемая точка (цель). Затем измеряют по масштабу в метрах расстояние (по перпендикуляру) до точки M от этой километровой линии, т. е. отрезок m, и полученную величину (330 м) приписывают к координате линии. Так получается абсцисса X. Для получения ординаты Y записывают левую (вертикальную) сторону того же квадрата (т. е. 77) и затем приписывают к ней расстояние в метрах, измеренное от нее по перпендикуляру до определяемой точки, т.е. отрезок n(750 м).



а б

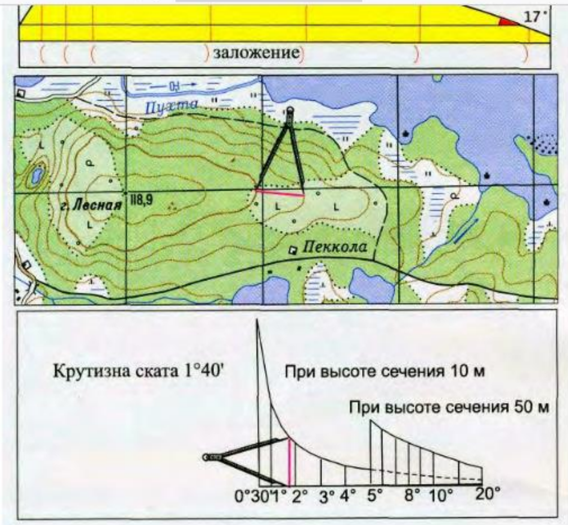
Рис.4

Таким образом, в данном примере координаты точки М будут: X = 36 330 м; Y = 77 750 м. Так как в данном случае при определении координат точки М цифровое обозначение километровых линий было записано не полностью, а лишь последними двумя их цифрами (36 и 77), то такие координаты называют сокращенными координатами точки М. В таком виде координаты обычно и записываются при определении их по карте. Если же оцифровку километровых линий записывать полностью, то получим полные координаты, как они обычно записываются в специальных списках (каталогах) координат геодезических пунктов. В нашем примере (рис. 52) полные координаты точки М запишутся так: X = 6 136 330 м; Y = 5 577 750 м. Измерение координат точек по карте и нанесение точек на карту по координатам производятся обычным способом, применяемым при измерении и откладывании прямых отрезков по масштабу карты, т. е. с помощью циркуля, или же по линейке с миллиметровыми делениями. Для этой же цели могут применяться специальные координатомеры (рис. 52), которые несколько упрощают работу, заменяя при этом масштаб, циркуль и линейку. Каждый из них представляет по площади квадрат координатной сетки на карте соответствующего масштаба, разбитый на более мелкие квадраты со сторонами по 200 м в масштабе карты. Точность определения по карте прямоугольных координат точек ограничивается не только ее масштабом, но и величиной погрешностей, допускаемых при съемке или составлении карты в нанесении на нее различных точек и объектов местности.

Наиболее точно — с ошибкой, не превышающей 0,2 мм, — на карту наносятся геодезические пункты и наиболее резко выделяющиеся на местности и видимые издали предметы, имеющие значение ориентиров и определяемые как геодезические пункты (отдельные колокольни, фабричные трубы, постройки башенного типа). Поэтому координаты таких точек возможно определять по карте примерно с той же точностью, с какой они на нее наносятся (т.е. с ошибкой

10 — 15 м для карты масштаба 1:50 000 и 20 — 30 м для карты масштаба 1:100 000). Остальные ориентиры и точки контуров наносятся на карту, а следовательно, и определяются по ней с ошибкой до0,5 мм, а точки, относящиеся к нечетко выраженным на местности контурам (например, контуру болота), - с ошибкой до 1 мм.

Определение по карте крутизны скатов. Крутизна ската – угол наклона ската к горизонтальной плоскости. Крутизна ската на карте определяется по заложению - расстоянию между двумя смежными основными или утолщенными горизонталями; чем меньше заложение, тем круче скат. Для определения крутизны ската надо измерить расстояние между горизонталями циркулем, найти соответствующий отрезок на графике заложений и прочитать число градусов.



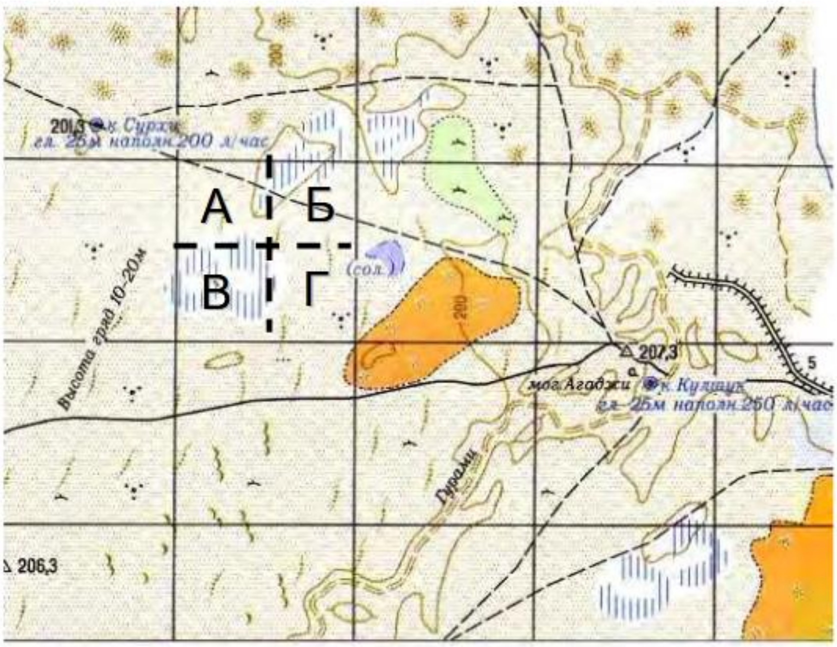
На крутых скатах это расстояние измеряется между утолщенными горизонталями, и крутизна ската определяется по графику, расположенному справа.

Целеуказание по карте. Координатная сетка весьма широко используется при работе на карте. Основное ее назначение — облегчить и упростить определение прямоугольных координат точек местности при целеуказании по карте. Вместе с тем она облегчает ориентирование на карте и указание на ней местоположения различных объектов при докладах, постановке задач, передаче распоряжений и составлении донесений. Наконец, она помогает быстро оценивать по карте на глаз расстояния и определять азимуты направлений. Чтобы указать приближенно местоположение какого-нибудь пункта на карте, достаточно назвать квадрат сетки, в котором он расположен. Для этого надо прочитать за рамкой карты оцифровка вертикальной и горизонтальной километровых линий, образующих нижний левый (юго-западный) угол квадрата.

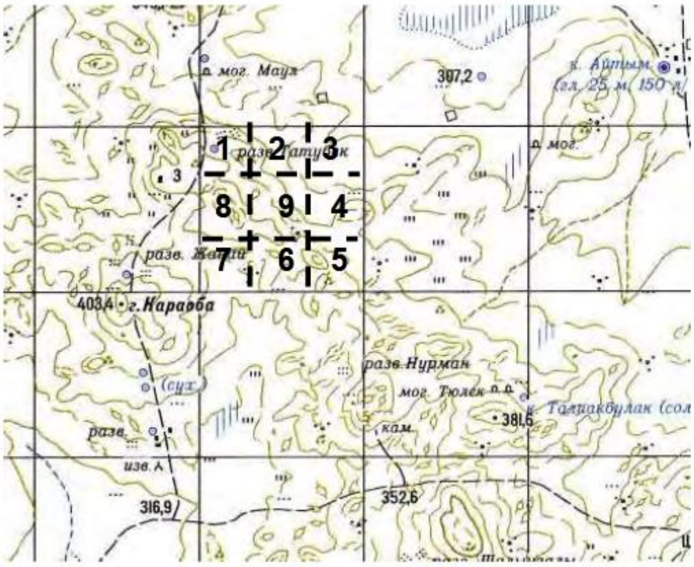
При этом необходимо обязательно соблюдать следующее правило: сначала прочитывать и называть оцифровку (номер) горизонтальной километровой линии, а затем вертикальной, т.е. сначала называть абсциссу X, потом ординату Y.

Пример. Командир, ориентирующий по карте своих подчиненных в обстановке, указывая местоположение точки с отметкой 118,0, говорит: «Квадрат сорок, сорок два: высота с отметкой 118,0». В письменных же донесениях и других документах этот пункт будет обозначаться так: «Высота с отметкой 118,0 (4042)». Задачей целеуказания является определение и показ местоположения обнаруженных целей. В зависимости от способа определения местоположения цели чаще всего применяются целеуказания в прямоугольных координатах и по квадратам координатной сетки. **Целеуказание в прямоугольных координатах** – наиболее точный и распространенный способ указания местоположения объекта (цели). Определенные по карте координаты цели передают, как правило, сокращенными. При целеуказании по квадратам километровой сетки достаточно указать квадрат, в котором расположена цель. Квадрат указывается цифровыми обозначениями километровых линий, пересечением которых образован его юго-западный (нижний левый) угол.

Правила указания квадрата карты при целеуказнии, были приведены ранее. При этом цифры пишутся и произносятся слитно, без разделения на X и Y. Например, – ЦЕЛЬ НП, 0512 (ноль пять двенадцать). Если требуется уточнить положение цели в квадрате, то он делится мысленно на 4 или 9 частей, из которых каждая обозначается в первом случае буквами, а во втором - цифрами, как показано на рисунке (5)и (6).



Целеукaзание по квадратам Рис.5



Целеуказание по «улитке» (спирали) Рис.6

В этом случае называют квадрат, в котором находится цель, и добавляют букву или цифру, уточняющую положение цели внутри квадрата. Например,

ЦЕЛЬ – НП, 0512-Б (цель – НП, 0512-3)

Задачи

1. На какое расстояние удалена точка А с координатами X = 6 885 км, Y= 4 852 км от точки В с координатами X = 6 852 км, Y = 4 852 км?

2. На каком расстоянии к востоку или западу от осевого меридиана зоны находятся точки, имеющие координаты:

А) X а = 3 832 325, Y а = 6 352 683;

Б) X ь = 5 121 420, Y ь = 8 621 350;

В) 6.X с = 4 835 740, Y с = 22 422 138?

3. Прямоугольные координаты исходной точки А (полюса):X а = 3 538 342, Y а= 6 344 535. Определить прямоугольные координаты точки В, если ее полярные координаты: α = 60° и S = 9 350 м.

4. Прямоугольные координаты стартовой позиции: X = 4 821 355, Y = 3 837 434, а цели X = 4 715 120, Y = 3 820 225. Определить полярные координаты цели.

Справочный материал

1. Формула расстояния между двумя точками;

Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. Формула нахождения угла между прямыми в пространстве;

$$\cos\varphi = \frac{\left|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

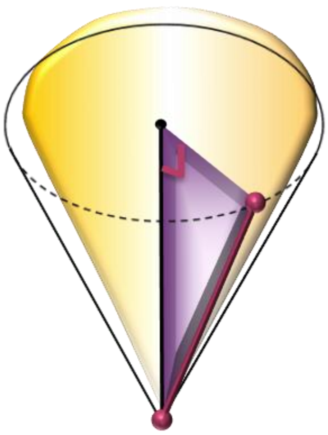
3. Формула нахождения координат вектора.

Координаты вектора, концами которого являются точки А (x_1,y_1,z_1) и В(x_2,y_2,z_2), находятся так: АВ$\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Формулы объемов геометрических тел

Определить количество дизельного топлива или керосина для заправки танка или самолета, рассчитать необходимое количество материала для развертывания палаточного городка, найти объем работы, связанной с освобождением прохода на пути следования группы войск , вычисление массы снаряда и другое - решение всех этих задач основывается на применении формул вычисления объемов многогранников и тел вращения, а так же формул вычисления площадей поверхностей пространственных фигур.

1. Авиационная бомба среднего калибра при взрыве образует воронку диаметром 6 м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1м^3 земли имеет массу 1560 кг? В ответе запишите массу, деленную на π.



Решение:

С математической точки зрения, глубина воронки есть не что иное, как высота конуса. Поэтому для решения задачи воспользуемся формулой нахождения объема конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 2 = 18\pi \text{ (м}^3\text{)}.$$

Для нахождения количества земли $1560 \cdot 18\pi = 28080\pi$ (кг).

Согласно условию, в ответ запишем 28080 кг.

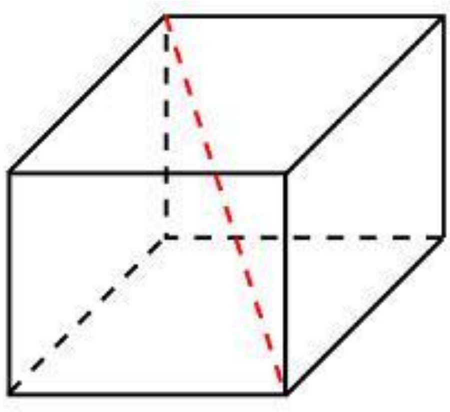
Ответ: 28080 кг.

2. Самостоятельно: Для продвижения группе войск через мост самоходной артиллерии необходимо освободить как помеху кучу щебня, которая представляет конусообразную поверхность. Радиус основания конической кучи щебня имеет длину 2,4 м. Длины образующих равны 2,6 м. Какой объем работы в кубических метрах предстоит выполнить артиллеристам? В ответе запишите $\frac{V}{\pi}$.

Ответ: 1, 92 куб. м.

3. На военном полигоне для проведения боевых учений был развернут палаточный городок. Армейская палатка представляет собой прямоугольный

параллелепипед длиной 5,2 м, шириной 3,6 м и высотой 2,5 м с двускатной крышей, приподнятой на 80 см. Размеры одной стороны крыши 5, 2 м х 2,7 м. Определить объем палатки и количество палаточного материала, необходимого для изготовления палатки.

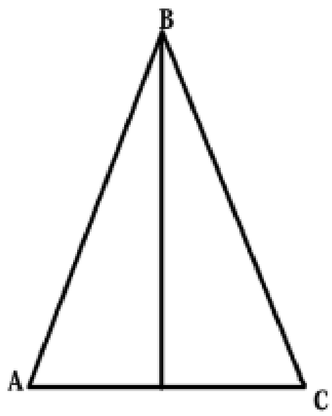


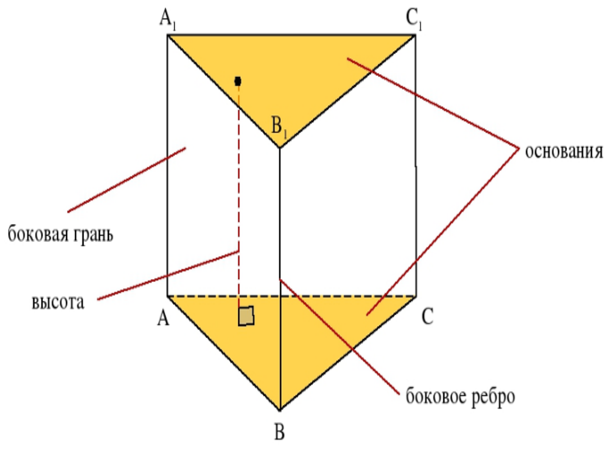
Решение: для решения задачи необходимо воспользоваться формулами объемов прямоугольного параллелепипеда и прямой треугольной призмы, которая представляется в задаче двускатной крышей. Поэтому объем всей палатки есть сумма объемов параллелепипеда и призмы.

$V_{\text{пар.}}$ = abc и $V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H$

$V_{\text{пар.}}$ = 5, 2 X 3,6 X 2,5 = 46,8 (м^3)

Теперь найдем объем прямой треугольной призмы. в основании которой лежит равнобедренный треугольник. (см. рис.) АС = 3,6 м., ВН = 0,8 м. Высотой призмы будет являться длина палатки.





$ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма

По формуле площади треугольника найдем площадь основания:

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 0,8 = 1,8 \cdot 0,8 = 1,44$ (м^2).

$V_{\text{пр}} = S_{\text{осн}} \cdot H = 1,44 \cdot 5,2 = 7,488$(м^3).

И тогда объем всей палатки $V_{\text{пал.}} = V_{\text{пар.}} + V_{\text{пр.}} = 46,8 + 7,488 = 54,288$(м^3).

Для нахождения количества палаточного материала найдем площадь поверхности объемной фигуры.

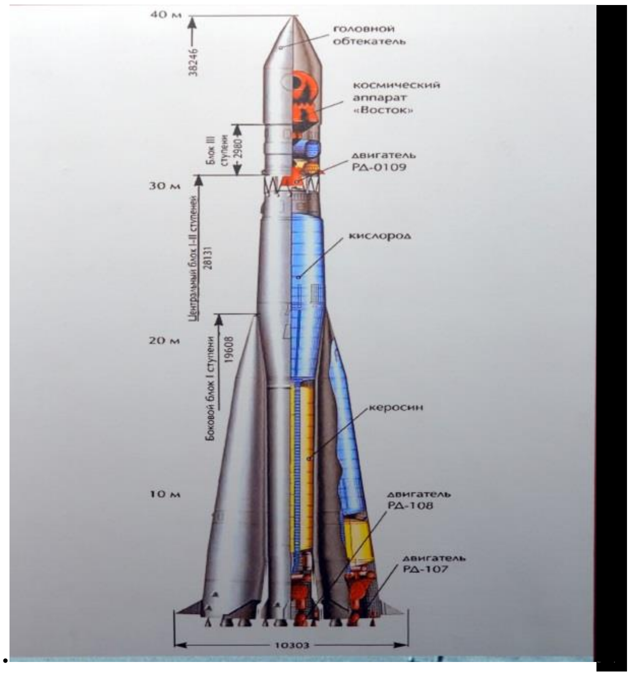
Необходимое количество материала для изготовления нижней части одной палатки рассчитаем по формуле: $S = 2ac + 2bc + ab = 2 \cdot 5{,}2 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 3{,}6 \cdot 2{,}5 + 5{,}2 \cdot 3{,}6 = 62{,}72$ (м^2).

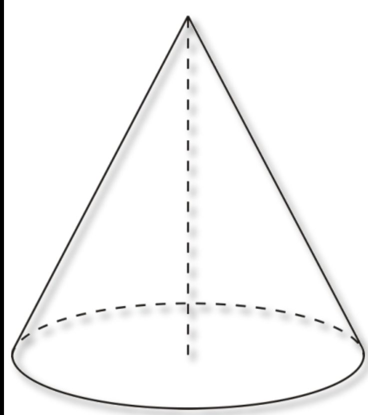
Количество материала, необходимое для изготовления крыши, рассчитаем таким образом: S =2 ·1,44 + 2 · 5,2 · 2,7 = 2,88 + 28,08 = 30,96(м^2).

И тогда всего площадь всей поверхности палатки S = 62,72 + 30,96 = 93,68 (м^2).

Ответ: Объем палатки 54,288 м^3, необходимое количество материала 93,68 м^2.

4. Головная часть ракеты является правильным круговым конусом с диаметром основания 540 мм и образующей, равной 880 мм. Определить объем и площадь боковой поверхности головной части ракеты.





Решение: воспользуемся формулами объема и площади боковой поверхности конуса:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ и $S_{бок.} = \pi R L$

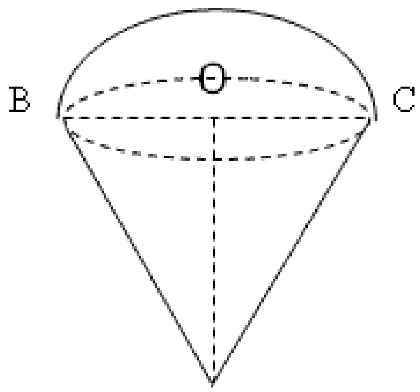
Так как $R = \frac{1}{2}D = 270$ мм., а L = 880 мм., то для вычисления объема найдем высоту конуса. По теореме Пифагора $H^2 = L^2 - R^2 = 880^2 - 270^2 = 774400 - 72900 = 701500$; $H = 10\sqrt{7015}$ (мм).

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = V = \frac{1}{3}\pi \cdot 270^2 \cdot 10\sqrt{7015} = 243000\,\pi\sqrt{7015}$(мм^3).

$S_{бок.} = \pi R L = S_{бок.} = \pi \cdot 270 \cdot 880 = 237600\,\pi$(мм^2).

Ответ: $243000\,\pi\sqrt{7015}$мм^3; $237600\,\pi$ мм^2.

5. Кадетам на полдник помимо пирожков с яблоками выдали мороженое в стаканчиках. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?



Решение: OA = 12 см

BC = d = 5 см

Переполнит ли мороженое стаканчик?

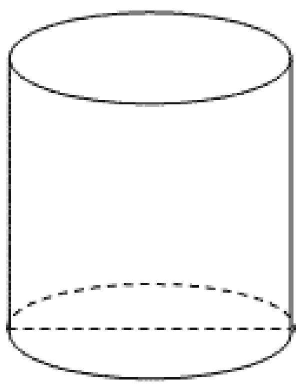
$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\ (\frac{5}{2})^3 = \frac{125\pi}{6} = 20\frac{5}{6}\pi$

Vк $= \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\ (\frac{5}{2})^2 \cdot 12 = \frac{25\pi 12}{12} = 25\pi$

Ответ: нет.

6. Какое количество дизельного топлива для заправки танков (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность топлива равна 0,85 г/см^3?

Решение: для решения нам сначала потребуется найти объем цилиндра, в котором известна высота H = 7м и диаметр цистерны D= 1м; $\rho_{топлива} = 0,85$ г/см^3



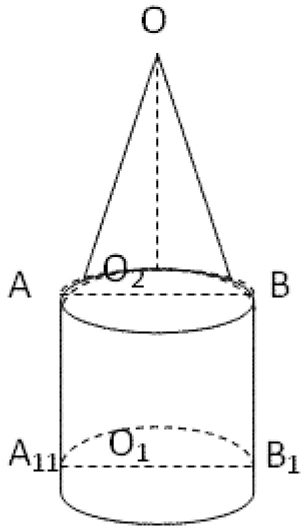
m =?

$V_ц = \pi R^2 H = \pi \cdot 9^2 \cdot 7 = 567\pi$ (м^3)

$m = V \cdot \rho \approx 1513$ т

Ответ: 1513 тонн.

7. Артиллерийский снаряд имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 25 см, высота 60 см, причем цилиндрическая часть снаряда имеет высоту 45 см. Плотность снаряда р= 0,03 г/см^3. Число $\pi \approx 3{,}14$. Определить массу снаряда. Ответ запишите в килограммах и округлите до десятых.



Решение: согласно условию задачи, основания конуса и цилиндра совпадают. Воспользуемся формулами вычисления объемов цилиндра и конуса. Из условия, что R = 25см, OO_1 = 60см, O_1O_2 = 45см, p= 0,03г/см^3

M= p·V; $V_ц$ = $\pi R^2 H = \pi \cdot 25^2 \cdot 4 = 28125\pi$(см^3).

Vк = $\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 25^2 \cdot 15 = 3125\pi$ (см^3).

Тогда Vсн. = $28125\pi + 3125\pi = 31250\pi$(см^3).

Соответственно масса снаряда будет равна:

M = 0,03·31250 π = 937,5· 3,14 = 2943,75 (г) = 2,94375 кг ≈ 2,9 кг.

Ответ: 2,9 кг

Итоговое занятие.

Защиты решения задач.

Задача 1: Легенда об основании Карфагена гласит, что, когда финикийский корабль пристал к берегу, местные жители согласились продать прибывшим столько земли, сколько можно огородить её одной бычьей шкурой. Но хитрая царица Дидона разрезала эту шкуру на ремешки, связала их и огородила полученным ремнём большой участок земли, примыкавший к побережью. Вопрос: Какую наибольшую площадь земли могли купить финикийцы.

Задача 2: На какую высоту за 10с поднимется ракета, запущенная вертикально вверх, если скорость меняется по закону: V= [2+1/(t+1)^2] км/с? Чему равна средняя скорость полета ракеты за этот промежуток времени?

Задача 3: Движение точки *M* задано в декартовых координатах уравнениями:

$$x = R \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t^2\right), \quad y = R \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t^2\right),$$

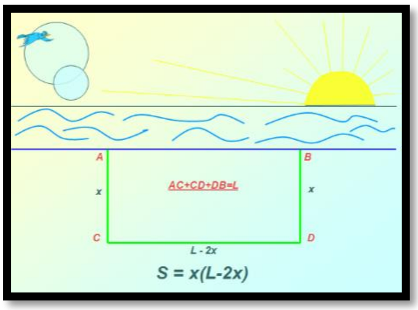
где R, ε – постоянные положительные величины, имеющие размерности, R – длины, ε – углового ускорения.

Перейти к естественному способу задания движения, т. е. определить траекторию и закон движения точки вдоль траектории в виде $S = f(t)$. Найти также скорость и ускорение точки.

Ответы и решения

Задание 1.

Решение: переведём задачу на язык математики. Найдем площадь прямоугольника, длинной стороной, примыкающей к берегу моря, значит длина загороженной части будет соответствовать величине L, тогда площадь занимаемой территории будет изменяться по формуле S(x)=x (L-2x), $S(x)=Lx-2x^2$, которая представляет квадратичную функцию. Исследуем ее на наибольшее значение, которое достигает парабола в вершине. Найдем абсциссу по формуле: $x=-\frac{-L}{2\cdot(-2)} = \frac{L}{4}$, ординату подстановкой у $(\frac{L}{4})=L\cdot\frac{L}{4}-2\cdot(\frac{L}{4})^2=\frac{L^2}{8}$. Значит размеры участка $AB=\frac{L}{2}$ и $CD=\frac{L}{4}$.



Задание 2.

Путь, пройденный ракетой за 10с, равен $S=\int_0^{10}\left(2+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt$ км/с. Функция f(x) = $2+1/(t+1)^2$ – непрерывная на [0;10] и принимает положительные значения на этом интервале. Согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем: s=21 км.

Поэтому соответствующая средняя скорость ракеты равна: $V_{ср}$=21/10=2,1км/с.

<u>*Ответ*</u>: 21км, 2,1км/с.

Задание 3.

Возведя каждое из уравнений почленно в квадрат, и затем сложив их, получим $x^2+y^2=R^2$. Следовательно, траекторией точки является окружность радиуса R с центром в начале координат. Из уравнений видно, что при $t = 0$, $x = R$, $y = 0$, т. е. точка M находится на оси Ox. Примем это положение M_0 за начало отсчета O' расстояния S; тогда при $t = 0$, $S = 0$. Когда $t > 0$ начинает возрастать, а x – убывать, т.е. точка начинает двигаться по направлению к оси Oy; примем это направление за положительное направление отсчета расстояния S.

Для определения зависимости $S = f(t)$ найдем выражение для dS. Как известно, $dS^2 = dx^2 + dy^2$, а $dx = \dot{x}\cdot dt$, $dy = \dot{y}\cdot dt$. Тогда $dS = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, и поскольку при $t = 0$, $S = 0$:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \qquad (*)$$

Из уравнений *(*)* находим:

$$\dot{x} = -R \cdot \varepsilon \cdot t \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}t^2\right), \quad \dot{y} = R \cdot \varepsilon \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t^2\right),$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2$$

Подставляя это выражение в равенство *(32)* и вынося постоянный множитель за знак интеграла, получим: $S = R \cdot \varepsilon \cdot \int_0^t t \cdot d \cdot t$ или $S = \frac{R \cdot \varepsilon \cdot t^2}{2}$ Таким образом, точка движется по окружности радиуса R по закону $S = \frac{R \cdot \varepsilon \cdot t^2}{2}$.

Скорость точки $v = \dot{S} = R \cdot \varepsilon \cdot t$ и растет пропорционально времени. Далее находим ускорение

$$a_\tau = \dot{v} = R \cdot \varepsilon,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2.$$

Так как $a_\tau = const$ и знаки v, a_τ совпадают ($v > 0$, $a_\tau > 0$), то движение точки является равноускоренным.

Наконец,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \cdot \varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot t^4},$$

$$tg\,\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{1}{\varepsilon \cdot t^2}.$$

Как видим, при $t = 0$, $a = a_\tau = R \cdot \varepsilon \cdot (a_n = 0)$ и $\mu = \frac{\pi}{2}$. Затем со временем величина a растет, а угол μ между вектором ускорения и радиусом окружности убывает, стремясь к нулю.

Список литературы

1. Альхова, З.Н. Внеклассная работа по математике / З.Н. Альхова, А.В. Макеева. – Саратов: «Лицей», 2010.

2. Астафьеф, В.Н. Разработка оценочных показателей количественных признаков двигательных тестов с использованием пакета «Анализ данных» / В.Н. Астафьеф, Г.Г. Дмитриев, 2014. Microsoft office excel https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/28824/1/baraz_pegashkin_2014.pdf

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 383 с.

4. Ахметов, М.Г. Топогеодезическое и навигационное обеспечение артиллерии: Учебное пособие / М. Г. Ахметов [и др.]; отв. за выпуск М. Г. Ахметов. - М.: Прометей, 2020. – 214 с.

5. Бараз, В. Использование MS EXCEL для анализа статистических данных. В. Бараз, В.Ф. Пегашкин. Нижний Тагил, 2014.

6. Веб-сайт Википедия: https://ru.wikipedia.org›wiki›

7. Гусева, Е.В. Методика обучения решению математических задач военно-прикладной направленности на основе использования программных средств образовательного назначения / Гусева Е.В., Родионов М.А. // Современные проблемы науки и образования. – 2013. - №5.

8. Корянов, А.Г., Многогранники: виды задач и методы их решения / А.Г. Корянов, А.А. Прокофьев. – М., 2011 г.

9. Мерзляк, Л.Г. Математика: 5 класс: учебник для общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир – 6-е изд., стериотип. – М.: Вентана-Граф, 2020. – 304 с.

10. Метапредметный подход в образовании при реализации новых образовательных стандартов – Режим доступа: https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/materialy-mo/2018/01/17/metapredmetnyy-podhod-v-obrazovanii-pri-realizatsii-novyh.

11. Мерзляк, Л.Г. Алгебра: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М.: Вентана-Граф, 2015.

12. Мерзляк, Л.Г. Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М.: Вентана-Граф, 2015.

13. Мерзляк, Л.Г. Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — М.: Вентана-Граф, 2015.

14. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс: в 2 ч. Ч. 1: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2014. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс: в 2 ч. Ч.

15. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс: в 2 ч. Ч. 1: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2014. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс: в 2 ч. Ч.

16. Менжевицкий, В.С. Решение задач по топографической карте / В.С. Менжевицкий, М.Г. Соколова, Н.Н. Шиманская. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 62 с.

17. Интернет-ресурсы: https://vifk.mil.ru/upload/site49/oMf8joSqO9.pdf

18. Интернет-ресурсы: ЕГЭ2021, Математика профильного уровня: задания ege.sdamgia.ru

19. Интернет-ресурсы: www.fipi.ru