

Уважаемые кадеты 7 курса! Вы очень ждали летних каникул. И мы, преподаватели, очень рады этому. Но не следует забывать о том, что через год вам всем сдавать ЕГЭ. Поэтому вы имеете уникальную возможность Ваш отдых разбавить решением олимпиадных и конкурсных задач, которые вы можете, если у вас вдруг появится такое желание, найти на сайтах:

https://it-edu.com/mipt-school/?meropr=losh2022_online Московский физико-технический институт организует олимпиадные школы для учеников 11 классов.

<https://edu-time.ru/> Всероссийские онлайн олимпиады для школьников Время знаний (11 класс).

<https://xn--80adjigfhveky.xn--p1ai/> Проведение дистанционных олимпиад с применением информационных технологий (11 класс).

<https://solncesvet.ru/olimpiada/po-matematike/> олимпиады по математике Солнечный свет (11 класс).

Мы уверены, что каждый будущий выпускник найдет для себя что-нибудь полезное. Ведь участие предполагает не только решение различных и интересных задач, но и получение дипломов, призовых мест. Ну а самое главное, вы узнаете, что у вас хорошо получается в математике, а над чем еще предстоит поработать. Творческих вам успехов и прекрасного запоминающегося летнего отдыха!

А те кадеты, которые все-таки не хотят забывать материал, изученный в курсе математики 10 класса, как повторение, могут освежить в памяти некоторые формулы и правила, и на досуге порешать задания, которые приведены ниже. Всем хорошего отдыха, отличного настроения и успехов во всем!

«Прямоугольный треугольник»

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Теорема ПИФАГОРА

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Пифагоровы тройки чисел

<i>a</i>	3	5	8	7
<i>b</i>	4	12	15	24
<i>c</i>	5	13	17	25

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad b = c \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad a = c \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad a = b \operatorname{tg} \alpha$$

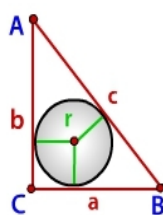
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad b = a \operatorname{ctg} \alpha$$

ВЫСОТА, ПРОВЕДЕННАЯ К ГИПОТЕНУЗЕ

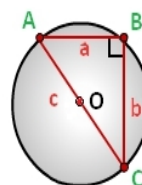
$$h^2 = a_c \cdot b_c, \quad h = \frac{ab}{c}$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$



a, b - катеты треугольника
c - гипотенуза



a, b - катеты прямоугольного треугольника
c - гипотенуза

Радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник (*r*):

$$r = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{a + b - c}{2}$$

Reshalkin.su

Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника (*R*):

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{c}{2}$$

Reshalkin.su

Задания:

1. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC=\sqrt{91}$, $BC=3$. Найдите $\cos B$.
2. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB=20$, $AC=16$. Найдите $\sin A$.
3. В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота $CH=2\sqrt{54}$, $BC=15$. Найдите $\cos B$.
4. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A=0,28$. Найдите $\sin A$.
5. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A=\sqrt{15}$. Найдите $\cos A$.
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A=10/\sqrt{109}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.
7. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC=\sqrt{19}$ и гипотенузы $AB=10$. Найдите $\sin A$.
8. Острые углы прямоугольного треугольника равны 34° и 56° . Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
9. Острые углы прямоугольного треугольника равны 22° и 68° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.
10. В треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $AC=8\sqrt{5}$, $CB=11\sqrt{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
11. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 31° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.
12. В треугольнике ABC $\angle C=90^\circ$, $AC=\sqrt{17}$, $AB=17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
13. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.
14. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin B=\sqrt{91}/10$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.

«Площади многоугольников»

1. Формулы площади квадрата

Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны: $S = a^2$

Площадь квадрата равна половине квадрата длины его диагонали: $S = \frac{1}{2} d^2$

2. Формула площади прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон: $S = a \cdot b$

3. Формулы площади параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты: $S = a \cdot h$

Площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон умноженному на синус угла между ними: $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

Площадь параллелограмма равна половине произведения длин его диагоналей умноженному на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$

4. Формулы площади ромба

Площадь ромба равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты: $S = a \cdot h$

Площадь ромба равна произведению квадрата длины его стороны и синуса угла между сторонами ромба: $S = a^2 \cdot \sin \alpha$

Площадь ромба равна половине произведению длин его диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Формулы площади трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту: $S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту

Формулы площади треугольника

1. **Площадь треугольника** равна половине произведения длины стороны треугольника на длину проведенной к этой стороне высоты:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

2. **Площадь треугольника** равна половине произведения двух его сторон умноженного на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

3. **Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу описанной окружности:**

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

4. **Площадь треугольника** равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности:

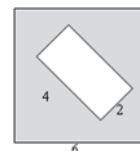
$$S = p \cdot r$$

5. **Формула Герона:** $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p - полупериметр треугольника

Задачи

«Площади многоугольников»

1. Периметр квадрата равен 40. Найдите площадь квадрата. Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.



2. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.
3. В прямоугольнике одна сторона равна 10, другая сторона равна 12. Найдите площадь прямоугольника.
4. В прямоугольнике диагональ равна 10, а угол между ней и одной из сторон равен 30° . Найдите площадь прямоугольника, делённую на $\sqrt{3}$.
5. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 44 и одна сторона на 2 больше другой.
6. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.
7. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен 45° . Найдите площадь треугольника.
8. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, острый угол, прилежащий к нему, равен 60° , а гипотенуза равна 20. Найдите площадь треугольника, делённую на $\sqrt{3}$.
9. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 28 и 100.
10. Периметр равнобедренного треугольника равен 196, а основание — 96. Найдите площадь треугольника.
11. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилежащих к ней углов равен 30° . Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.
12. В равнобедренной трапеции основания равны 3 и 9, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45° . Найдите площадь трапеции
13. Основания равнобедренной трапеции равны 5 и 17, а её боковые стороны равны 10. Найдите площадь трапеции.
14. Сторона ромба равна 5, а диагональ равна 6. Найдите площадь ромба.

15. Периметр ромба равен 40, а один из углов равен 30° . Найдите площадь ромба.
16. Одна из сторон параллелограмма равна 12, а опущенная на нее высота равна 10. Найдите площадь параллелограмма.
17. Одна из сторон параллелограмма равна 12, другая равна 5, а один из углов — 45° . Найдите площадь параллелограмма, делённую на $\sqrt{2}$.
18. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 14 и 6.
19. Площадь ромба равна 54, а периметр равен 36. Найдите высоту ромба.
20. В треугольнике одна из сторон равна 10, а опущенная на нее высота — 5. Найдите площадь треугольника.
21. В треугольнике одна из сторон равна 10, другая равна $10\sqrt{3}$, а угол между ними равен 60° . Найдите площадь треугольника.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов.
Основные тригонометрические формулы"

α	градусов	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\alpha)$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}(\alpha)$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}(\alpha)$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Задания.

1. Вычислите $\cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$
2. Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
3. Вычислить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
4. Вычислить значение tga , если $\operatorname{ctga} = 0,2$
5. Вычислите: $\sin^2 3y + \cos^2 3y + 1$
6. Упростите:
 - 1) $1 - \cos^2 \alpha$
 - 2) $\cos^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)$
 - 3) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$
 - 4) $(\cos \alpha - 1)(1 + \cos \alpha)$
 - 5) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$
 - 6) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1$
 - 7) $\sin^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$

«Формулы корней тригонометрических уравнений»

$$\sin x = a \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in Z,$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi k, k \in Z$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in Z$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = 0, x = \pi k, k \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Задания:

$$1) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \operatorname{tg} x = 1$$

$$4) \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$5) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6) \operatorname{ctg} x = -1$$

$$7) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$8) \operatorname{tg} x = -1$$

$$9) \sin x = \sqrt{3}$$

$$10) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$11) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$12) \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$13) \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$14) \operatorname{ctg} x = 3$$

$$15) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$16) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$17) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$18) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

"Формулы приведения"

Функция / угол в рад.	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
Функция / угол в °	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$

1. Преобразуйте данное выражение с помощью формул приведения.

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; 2) $\sin(180^\circ - x)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(2\pi + x)$;

5) $\cos(x - 90^\circ)$; 6) $\sin(x - 2\pi)$; 7) $\operatorname{tg}(3,5\pi - x)$; 8) $\operatorname{ctg}(x - 23\pi)$;

9) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. 10) $\cos^2(\pi - x)$

2. Вычислите.

1) $\sin 135^\circ$; 2) $\cos(-150^\circ)$; 3) $\sin(-300^\circ)$; 4) $\operatorname{tg} 315^\circ$;

5) $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

3. Упростите выражение.

1) $\sin(270^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ + \alpha)$

2)
$$\frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$$

«Формулы тригонометрии»

1. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

2. Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

3. Формулы двойного аргумента	4. Формулы понижения степени
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Задания:

- Найдите значение выражения $24\sqrt{3}\cos(-750^\circ)$.

2. Найдите $26 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$

3. Найдите значение выражения: $6\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}$.

4. Найдите значение выражения: $-\frac{4}{\sin^2 27^\circ + \sin^2 117^\circ}$.

5. Найдите значение выражения: $\frac{-17 \sin 108^\circ}{\sin 54^\circ \cdot \sin 36^\circ}$

6. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{116}}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$

7. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$

8. Найдите значение выражения: $\frac{-20 \sin 373^\circ}{\sin 13^\circ}$

9. Найдите значение выражения: $\frac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)}$

10. Найдите значение выражения $\sqrt{8} - \sqrt{32} \sin^2 \frac{11\pi}{8}$

11. Найдите значение выражения $\frac{22(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ}$

12. Найдите значение выражения $\sin 46^\circ \cos 134^\circ + \sin 134^\circ \cos 46^\circ$.

13. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{7 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 9 \cos \alpha} = 2$

14. Найдите значение выражения $\frac{-9}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 198^\circ}$

«Формулы и правила дифференцирования»

Правила вычисления производных

Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0 , то

$$1. (U + V)' = U' + V'$$

$$2. (U V)' = U' V + U V'$$

$$1. \left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U' V - U V'}{V^2}$$

Если функция U дифференцируема в точке x_0 , а C - постоянная, то $(CU)' = CU'$

Основные формулы дифференцирования

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сложная функция: $y = g(f(x))$.

Примеры: 1) $y = (3x^2 - 2x)^5$. $\begin{cases} y = f^5; \\ f = 3x^2 - 2x. \end{cases}$

2) $y = \sqrt{\sin x}$. $\begin{cases} y = \sqrt{f}; \\ f = \sin x. \end{cases}$ 3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. $\begin{cases} y = \cos f; \\ f = 2x - \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Правило нахождения производной сложной функции

$$g'(f(x)) = g'(f) \cdot f'(x)$$

(производная сложной функции равна
производной основной функции
на производную внутренней функции)

Задания:

Найдите производную функции:

- 1) $y = x^3 - \sqrt{2};$
- 2) $y = 3x^4 - x^2 - 4x + \pi$
- 3) $y = -\cos x + 4 \sin x$
- 4) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + x + \sqrt{\sin \frac{\pi}{6}}$
- 5) $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- 6) $y = \frac{5}{x} - 6\sqrt{x} + 5$
- 7) $y = x^2 - \frac{\pi}{3}x$
- 8) $y = \cos 2x - x\sqrt{2}$
- 9) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) |$
- 10) $y = \sqrt{2x + 6}$
- 11) $y = |x|$

Физический смысл производной функции в данной точке

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Или, если Δx – перемещение тела, а Δt – промежуток времени, в течении которого выполнялось движение, то $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ – средняя скорость движения на промежутке времени t .

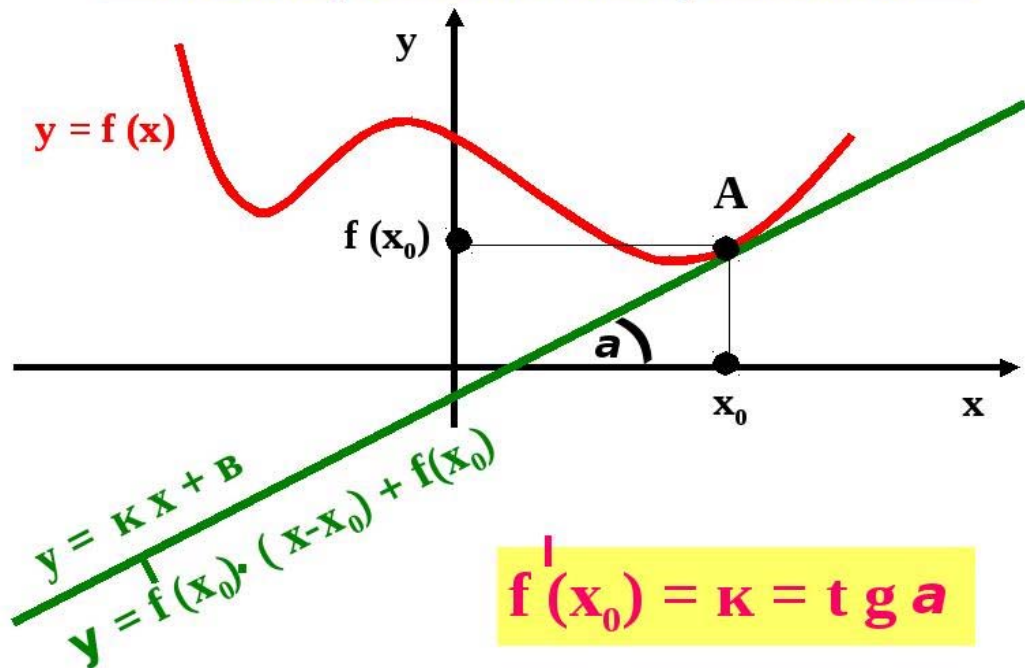
При $\Delta t \rightarrow 0$ $V_{\text{ср.}}$ $\rightarrow$ к мгновенной скорости $V(t)$, следовательно, $V(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = V(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = V(t)$$

Производная от функции в данной точке – это скорость изменения функции. $f'(x) = V(x)$

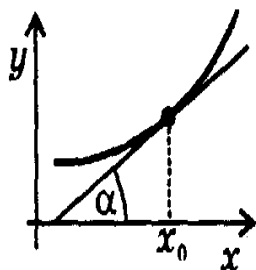


2. Геометрический смысл производной.

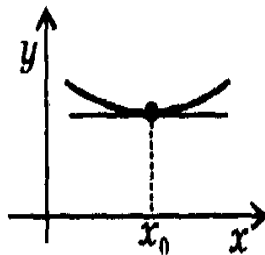


ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

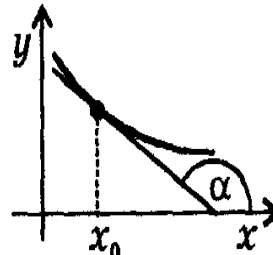
Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке:



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



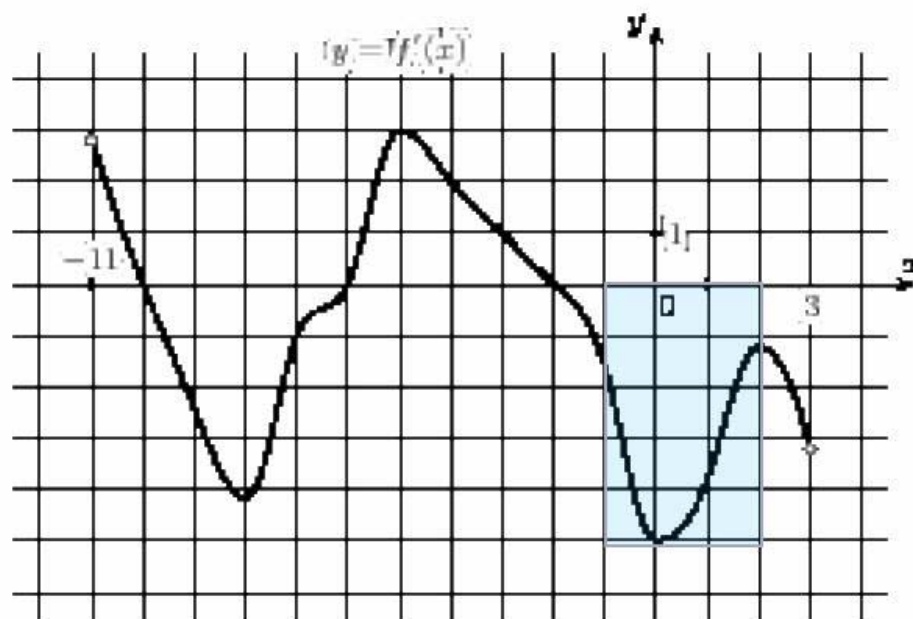
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

Пример:

На рисунке изображен график **производной** функции. В какой точке отрезка $[-1; 2]$ функция принимает наибольшее значение?



Производная отрицательна f функция убывает

Задания:

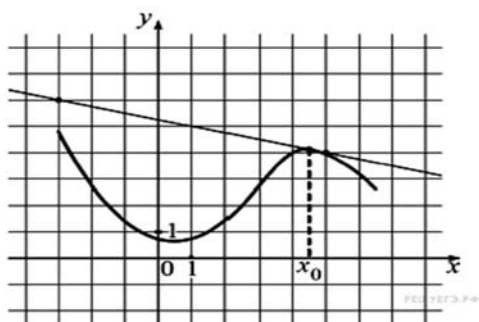
1. Материальная точка движется прямолинейно по зако-

ну $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 - 4t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 38 м/с?

2. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

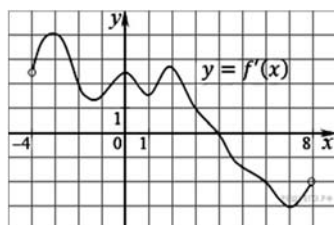
3. Прямая $y = 9x + 5$ является касательной к графику функции $18x^2 + bx + 7$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

4. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



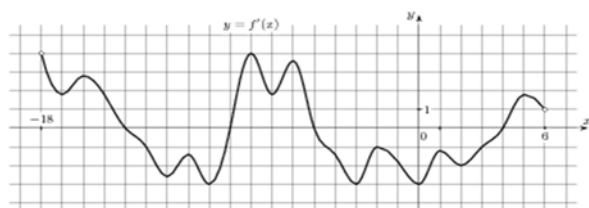
5. Прямая $y = -3x - 8$ является касательной к графику функции $ax^2 + 27x + 7$. Найдите a .

6.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 6]$.

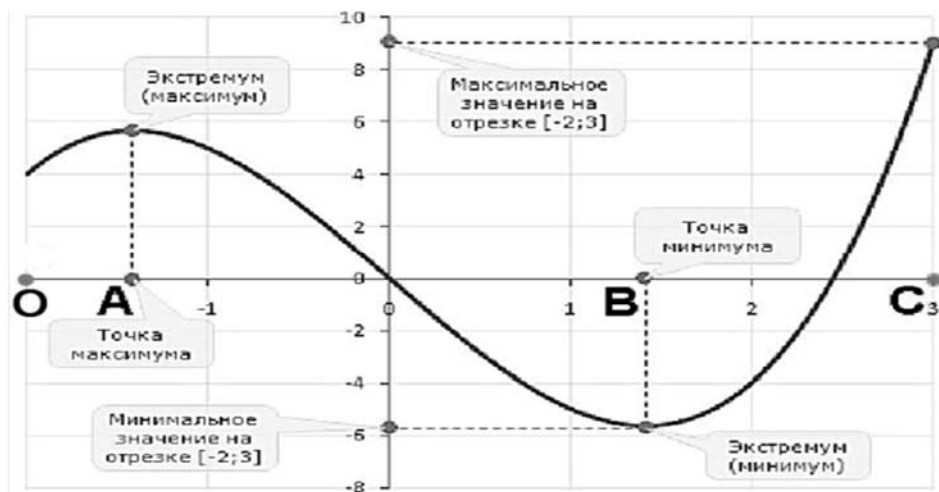
7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.



8.

9. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

«Точки экстремума и наибольшее (наименьшее) значение функции»



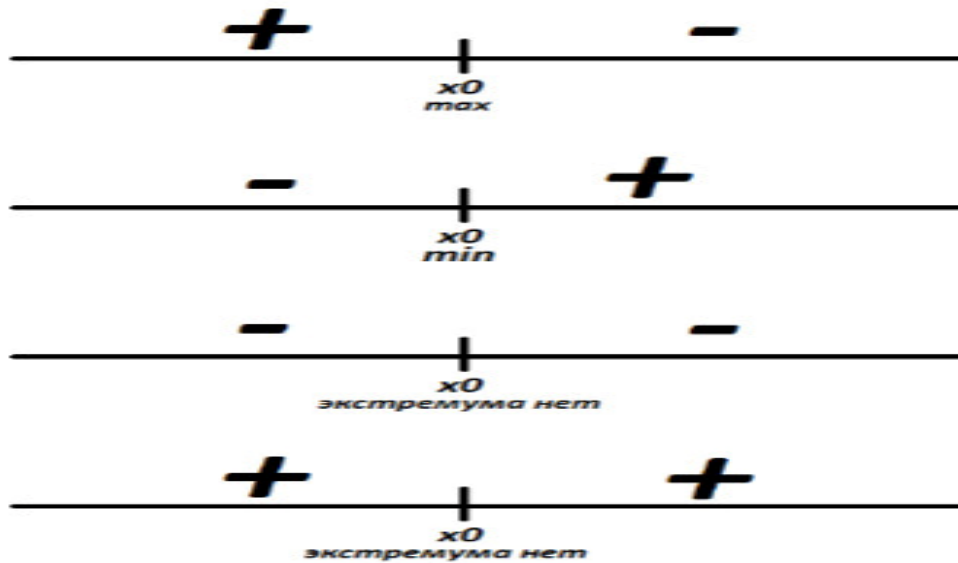
$U_{\text{наиб}}$ – это максимальное значение функции на отрезке,

$U_{\text{наим}}$ – это минимальное значение функции на отрезке

Алгоритм нахождения точек экстремума (x_{max} ; x_{min}) функции

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

Точками экстремума являются те критические точки, которые разделяют интервалы возрастания-убывания.



Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки внутри отрезка $[a;b]$.
3. Вычислить значение функции в стационарных и критических точках, а так же в $f(a)$ и $f(b)$. Выбрать наименьшее и наибольшее значения, это и будут точки наименьшего и наибольшего значения функции

Задания:

1. Найдите наибольшее значение функции $y = 46x - 23\operatorname{tg}x - 11,5\pi - 10$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
2. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 144}$.
3. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.
4. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 6$ на отрезке $[0; 3]$.
5. Найдите точку максимума функции $y = x^2(x - 2) - 4$.
6. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 2)^2 e^x$ на отрезке $[-5; 1]$.
7. Найдите наибольшее значение функции $y = 18\sin x - 9\sqrt{3}x + 1,5\sqrt{3}\pi + 21$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
8. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.
9. Найдите наибольшее значение функции $y = 58x - 58\operatorname{tg}x + 26$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
10. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 28x + 211}$.
11. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 9}$.
12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 7)^2(x + 6)$ на отрезке $[-1; 20]$.
13. Найдите наибольшее значение функции $y = 48x - 24\operatorname{tg}x - 12\pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.
14. Найдите точку минимума функции $y = (x + 3)^2 e^{2-x}$.
15. Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x + 7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6; 5; 0]$.
16. Найдите точку максимума функции $y = 15x^2 - x^3 + 19$.
17. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ на отрезке $[-11; -0,5]$.
18. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 324}{x}$.
19. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 12}$.
20. Найдите точку минимума функции $y = (x + 3)^2(x + 5) - 1$.

